

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

И. В. Мирошник

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Нелинейные и оптимальные системы



 ПИТЕР



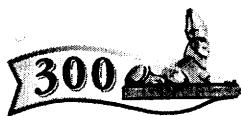
УЧЕБНОЕ / ПОСОБИЕ

И. В. Мирошник

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Нелинейные и оптимальные системы

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по группе направлений подготовки бакалавров и магистров 550000 — «Технические науки» и дипломированных специалистов 650000 — «Техника и технологии» дисциплине «Теория автоматического управления»



300.piter.com

Издательская программа

**300 лучших учебников для высшей школы
в честь 300-летия Санкт-Петербурга**

осуществляется при поддержке Министерства образования РФ

 **ПИТЕР®**

Москва · Санкт-Петербург · Нижний Новгород · Воронеж
Ростов-на-Дону · Екатеринбург · Самара · Новосибирск
Киев · Харьков · Минск

2006

ББК 32.965-01я7
УДК 681.5.01(075)
М64

Рецензенты:

Андреевский Б. Р., кандидат технических наук, доцент Балтийского государственного технического университета «ВОЕНМЕХ»

Путов В. В., доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой Систем автоматического управления Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ»

Мирошник И. В.

М64 Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы. — СПб.: Питер, 2006. — 272 с.: ил. — (Серия «Учебное пособие»).

ISBN 5-469-00351-5

В учебном пособии приведены современные методы анализа и проектирования нелинейных систем автоматического управления. Основное внимание уделяется теории гладких систем и ее разделов, ориентированных на решение задач синтеза и недостаточно представленных в существующей литературе. Изучаются особенности нелинейной динамики, понятия и методы современной теории устойчивости. Обсуждаются вопросы преобразования нелинейных систем, точной линеаризации и аппроксимации, а также подходы к решению задач анализа и проектирования нелинейных систем с помощью методов линейной теории. Вводятся понятия управляемости и изучаются методы локальной стабилизации нелинейных объектов, а также вопросы управления каскадными системами. Рассматриваются методы согласованного управления многоканальными системами и решения траекторных задач, проблемы оптимизации и методы синтеза оптимальных систем управления. В книгу включен цикл практических занятий — практикум, основное содержание которого составляют модельные (компьютерные) эксперименты, ориентированные на наглядное подтверждение изучаемых концепций и приобретение навыков синтеза нелинейных и оптимальных систем.

Пособие предназначено как для начального ознакомления с предметом, аппаратом и языком современной теории нелинейных систем, так и для углубленной подготовки. Может быть использовано студентами технических университетов при освоении соответствующих разделов теории автоматического управления, а также аспирантами и научными работниками, специализирующимися в области нелинейной динамики.

ББК 32.965-01я7
УДК 681.5.01(075)

Все права защищены. Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельцев авторских прав.

Содержание

Предисловие	6
Список сокращений и обозначений	9
Глава 1. Основные понятия и математические модели	11
1.1. Нелинейные функции и отображения	11
1.1.1. Отображения и операторы	11
1.1.2. Функции	14
1.1.3. Векторные поля и распределения	21
1.1.4. Гиперповерхности, поверхности и кривые	23
1.2. Модели нелинейных систем	26
1.2.1. Нелинейные звенья	26
1.2.2. Соединение нелинейных звеньев	30
1.2.3. Основные динамические модели	33
Глава 2. Переходные процессы и особенности нелинейной динамики	36
2.1. Интегральные кривые и фазовые траектории	36
2.1.1. Основные понятия	36
2.1.2. Построение фазовых траекторий: метод припасовывания и метод изоклин	40
2.1.3. Инвариантные множества и аттракторы	46
2.2. Особенности нелинейной динамики	49
2.2.1. Существование решений	50
2.2.2. Единственность решений	52
2.2.3. Продолжимость решений и полнота системы	53
2.2.4. Стационарные решения	55
2.2.5. Инвариантные множества, локальные и глобальные свойства ..	57
Глава 3. Устойчивость нелинейных систем	61
3.1. Основные понятия теории устойчивости	61
3.1.1. Равновесные состояния и устойчивость	61
3.1.2. Первый метод Ляпунова	68
3.1.3. Второй метод Ляпунова	69
3.1.4. Устойчивость линейных и линеаризованных систем	76

3.2. Частичная устойчивость и устойчивость по выходу	78
3.2.1. Устойчивость по части переменных	79
3.2.2. Частичная устойчивость (устойчивость по функции)	83
3.2.3. Устойчивость по выходу	88
3.3. Пассивность и устойчивость по входу	91
3.3.1. Пассивные системы	91
3.3.2. Устойчивость по входу	96
Глава 4. Методы управления гладкими системами	99
4.1. Эквивалентные формы, линеаризация и стабилизация состояния	99
4.1.1. Преобразование автономных систем	100
4.1.2. Преобразования объекта управления и канонические формы ...	105
4.1.3. Управляемость нелинейных систем	110
4.1.4. Методы линеаризации и алгоритмы локальной стабилизации ...	112
4.2. Канонические формы вход-выход и стабилизация выхода	117
4.2.1. Относительная степень и основное преобразование	118
4.2.2. Нуль-динамика и нормальная форма	122
4.2.3. Точная линеаризация и стабилизация выхода	125
4.3. Управление каскадными системами	128
Глава 5. Согласованное управление и траекторные задачи	131
5.1. Задачи согласования и траекторного управления	131
5.2. Управление кинематической моделью	134
5.3. Управление динамической моделью	136
5.4. Управление движением по поверхности	142
Глава 6. Релейные системы	147
6.1. Релейные системы с нелинейным объектом управления	147
6.2. Скользящий режим	151
6.3. Релейные системы с линейным объектом управления	156
6.3.1. Условия устойчивости	157
6.3.2. Скользящий режим и эквивалентное управление	160
6.3.3. Скользящий режим возмущенной системы	163
Глава 7. Оптимальное управление и классические методы оптимизации ..	165
7.1. Задачи оптимального управления	166
7.2. Экстремумы функций	169
7.2.1. Основная задача	169
7.2.2. Задачи на условный экстремум	173
7.3. Простейшая задача вариационного исчисления	176
7.3.1. Вариации функционалов и основные теоремы	178
7.3.2. Параметризация задачи и уравнение Эйлера–Лагранжа	180
7.3.3. Частные случаи и обобщения	183
7.3.4. Задача с подвижными концами	186
7.4. Задачи на условный экстремум	189
7.4.1. Задача Лагранжа	189
7.4.2. Синтез оптимального управления	195

7.5. Теория Гамильтона	198
7.5.1. Каноническая модель в гамильтоновой форме	198
7.5.2. Синтез оптимального управления	200
Глава 8. Методы оптимального управления	202
8.1. Квадратичные функционалы и линейные регуляторы	202
8.1.1. Квадратичные функционалы, задачи оптимизации, линейные обратные связи	203
8.1.2. Решение общей задачи ЛКР	208
8.1.3. Задача оптимизации на бесконечном интервале	216
8.1.4. Асимптотические свойства задачи ЛКР	221
8.2. Принцип максимума	225
8.2.1. Функция Гамильтона и основная теорема	225
8.2.2. Оптимальные управляющие воздействия (частные случаи)	229
8.2.3. Оптимальное быстроедействие линейных объектов	235
8.3. Принцип оптимальности и уравнение Беллмана	239
Глава 9. Практикум	245
9.1. Анализ нелинейных систем	245
9.2. Синтез нелинейных систем	251
9.3. Согласованное управление и траекторные задачи	254
9.4. Релейные системы	258
9.5. Оптимальное управление	259
Литература	265
Предметный указатель	268

Предисловие

Вторая половина XX века характеризуется существенным развитием большинства разделов теории автоматического управления, изменением подходов к изучению динамических процессов, появлением целого ряда новых классов систем и направлений научных исследований, что и определило общий облик теории начала нового тысячелетия.

Наиболее значимые изменения претерпела теория нелинейных систем. Это связано как с использованием метода пространства состояний, так и с внедрением аппарата дифференциальной геометрии, функционального анализа, теории оптимальности, новыми трактовками концепций линеаризации, инвариантности и устойчивости, а также с активным изучением таких «экзотических» явлений, как самоорганизация, бифуркации и динамический хаос.

Широкие возможности современной вычислительной техники и методов математического моделирования позволили практически исключить необходимость в трудоемких процедурах нахождения аналитических решений нелинейных дифференциальных уравнений и специальных методах графического построения переходных процессов. Как и в линейной теории, определяющее значение приобрели математические методы анализа *обобщенных* показателей — динамических, точностных и комбинированных оценок качества системы. Расширилось понимание целей управления — от традиционных задач стабилизации и слежения к задачам частичной стабилизации, инвариантности и аттрактивности множеств, от использования функций Ляпунова для анализа свойств устойчивости до исследования с их помощью качественных показателей системы и решения задач синтеза управления. Синтетический характер многих подходов, их очевидная направленность на построение регуляторов и решение прикладных задач автоматического управления являются одними из отличительных особенностей современной теории нелинейных систем.

Новая интерпретация теории нелинейных систем нашла отражение в монографиях и учебниках, изданных в последние годы за рубежом (см., например, [46]–[49], [52]), а также в ряде отечественных монографий [2, 11, 16, 20, 26, 40]. В то же время соответствующая *учебная* литература на русском языке практически

отсутствует, что вызывает опасность утраты передовых позиций, традиционно занимаемых отечественной наукой в области нелинейной теории управления. Данная книга призвана внести определенный вклад в заполнение указанного пробела.

В учебном пособии рассматриваются базовые концепции и методологии современной теории автоматического управления в области линейных систем (Часть 1. Линейные системы) и нелинейных систем (Часть 2. Нелинейные и оптимальные системы).

В первой части книги [24] изучаются основные положения теории линейных систем управления и метода пространства состояний.

Во второй части представлены современные методы анализа нелинейных процессов, синтеза нелинейных систем, оптимизации и построения оптимальных систем управления. Приведены необходимые теоретические сведения из функционального анализа и дифференциальной геометрии (**глава 1**), изучаются особенности нелинейной динамики (**глава 2**). Вводятся основные понятия современной теории устойчивости и рассматриваются методы анализа устойчивости, пассивности и частичной устойчивости нелинейных систем (**глава 3**). Обсуждаются проблемы преобразования координат, позволяющие в целом ряде случаев решить задачи анализа и проектирования нелинейной системы с помощью хорошо изученных методов линейной теории. Вводятся понятия управляемости, изучаются методы линеаризации и локальной стабилизации нелинейных систем, а также вопросы управления каскадными системами (**глава 4**). Рассмотрены методы согласованного управления многоканальными системами и решения задач управления движением по заданным кривым и поверхностям (**глава 5**). **Глава 6** посвящена свойствам релейных систем и их поведению в скользящих режимах. В **главе 7** изучаются классические методы оптимизации, а в **главе 8** — основы современной теории оптимального управления.

В книгу включен *цикл практических занятий — практикум (глава 9)*. Основное содержание цикла составляют расчеты и модельные эксперименты, выполняемые с использованием известных программных средств (см., например, [2, 10]). Практикум ориентирован на наглядное подтверждение изучаемых концепций и приобретение навыков исследования нелинейных и оптимальных систем различного типа.

Книга предполагает знакомство читателя с базовыми понятиями теории линейных систем (см. [1, 2, 24, 31, 36]), а также теории дифференциальных уравнений и линейной алгебры в пределах стандартных курсов технических университетов. Желательно также знание основных понятий теории множеств, вариационного исчисления и дифференциальной геометрии (см. [7, 28]).

Основное внимание в книге уделяется теории гладких систем и ее разделов, ориентированных на решение задач синтеза, недостаточно представленных в существующей литературе. Целый ряд важных вопросов нелинейной теории управления остается за рамками данной книги и может быть изучен с помощью других литературных источников (см. литературу). Так, методы анализа периодических режимов нелинейных систем изучаются в работах [4, 31, 34, 36, 37], проблемы аб-

солютной устойчивости изложены в [2, 37], нелинейные стохастические системы рассмотрены в работах [4, 36, 37], а адаптивные и робастные системы — в [29, 30]. Для знакомства с более сложными разделами нелинейной динамики, посвященными анализу хаотических систем, методам синергетики и кибернетической физики, можно обратиться к монографиям [2, 16, 20, 40].

В основу учебного пособия положены курсы лекций «Нелинейные системы» и «Основы теории оптимального управления», читаемые автором в Санкт-Петербургском государственном университете информационных технологий, механики и оптики (СПбГУ ИТМО) для студентов, обучающихся по специализации *Автоматизация и управление*, а также цикл практических занятий (компьютерный практикум). При подготовке и дальнейшем развитии курса максимально учитывался многолетний опыт теоретических, методических и прикладных разработок кафедры систем управления и информатики (автоматики и телемеханики) СПбГУ ИТМО, а также материал изданных в последние годы монографий и учебных пособий по теории автоматического управления.

Книга содержит результаты научных исследований, выполненных при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и программы фундаментальных исследований №19 Президиума Российской академии наук.

Учебное пособие предназначено как для начального ознакомления с предметом, аппаратом и языком современной теории нелинейных систем, так и для более углубленной подготовки к самостоятельным исследованиям нелинейных процессов и решения прикладных задач. Может быть использовано студентами технических университетов при освоении соответствующих разделов теории автоматического управления, выполнения практических занятий, а также аспирантами и научными работниками, специализирующимися в области нелинейных систем.

Автор выражает свою признательность коллегам и сотрудникам кафедры Систем управления и информатики СПбГУ ИТМО и лаборатории «Управление сложными системами» ИПМаш РАН, а также благодарит доцента К. А. Сергеева и инженера Екатерину Ольховскую за помощь в подготовке рукописи.

Автор искренне благодарен Виктору Владимировичу Путову и Борису Ростиславичу Андриевскому за полезные замечания и ценные рекомендации, способствовавшие улучшению содержания учебного пособия.

Список сокращений и обозначений

ОУ — объект управления

Р — регулятор

ЛКР — линейное квадратичное регулирование

$x(t) = \{x_i(t)\} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — вектор состояния; $x_0 = x(0)$ — вектор начальных значений (начальных условий)

$y(t)$ — выходная (регулируемая) переменная

u — входное (управляющее) воздействие

$x^*(t), u^*(t)$ — оптимальные процессы

$\lambda(t)$ — вектор состояния сопряженной системы (вектор множителей Лагранжа)

$e(t)$ — отклонение, ошибка

f, g, h — вектор-функции нелинейной модели ОУ

A, b, c — матрицы одноканальной линейной модели ОУ; A_0, b_0, c_0 — матрицы канонической формы ОУ

A, B, C — матрицы многоканальной линейной модели ОУ

$\lambda_i\{A\}$ — собственные числа матрицы A

$k = \{k_i\}$ — матрица-строка коэффициентов обратной связи

K — прямоугольная матрица обратной связи

\mathbb{R}^n — пространство состояний (n -мерное линейное пространство); $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ — множество вещественных чисел, $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}^1$ — множество неотрицательных чисел

$\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^m$ — области соответствующих пространств

x^* — положение равновесия (равновесное состояние); $\mathcal{E}(x^*)$ — открытая окрестность точки x^*

\mathcal{X}^* — инвариантное множество; $\mathcal{E}(\mathcal{X}^*)$ — открытая окрестность множества \mathcal{X}^*

S^* — инвариантная гиперповерхность / кривая, подмногообразие; $\mathcal{E}(S^*)$ — открытая окрестность S^*

Z^* — множество (подмногообразие) нуль-динамики

t_n — время переходного процесса

t_f — время окончания процесса

$p = d/dt$ — оператор дифференцирования

$\mathcal{L}_f g = [f, g]$ — производная Ли от вектора g вдоль векторного поля f (скобка Ли)

s — комплексная переменная

Глава 1. Основные понятия и математические модели

Для исследования свойств динамических систем и синтеза алгоритмов управления необходимо иметь адекватные *математические модели*, т. е. аналитическое описание интересующих нас явлений и процессов. Наиболее распространенные модели динамических систем — это обыкновенные дифференциальные уравнения. Характерной чертой *нелинейных* систем является использование для их описания *нелинейных* операторов (отображений). В этой главе приводятся основные понятия, связанные с различными типами отображений, рассматриваются нелинейные блоки и модели нелинейных динамических систем.

1.1. Нелинейные функции и отображения

К нелинейным относятся динамические системы, которые описываются с помощью нелинейных функций и операторов. Необходимость получения математических моделей нелинейных систем, их преобразования и анализа определяет важность рассматриваемых в этом разделе понятий функционального анализа и дифференциальной геометрии (см. также [7, 11, 17, 26, 28]).

1.1.1. Отображения и операторы

Рассмотрим множества \mathcal{X} и \mathcal{Y} с элементами $x \in \mathcal{X}$ и $y \in \mathcal{Y}$ (рис. 1.1).

Определение 1.1. *Отображением (операцией, преобразованием)* называется правило (оператор)

$$\mathcal{F}: \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y},$$

в соответствии с которым каждому элементу $x \in \mathcal{X}$ ставится в соответствие элемент $y \in \mathcal{Y}$, т. е.

$$y = \mathcal{F}(x).$$

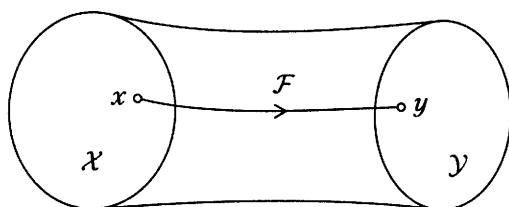


Рис. 1.1. Отображение

Представляют интерес следующие частные случаи отображений.

1. Скалярная функция f — отображение числового пространства \mathbb{R} в числовое пространство \mathbb{R}

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

по правилу

$$y = f(x),$$

где x называется *аргументом*, а y — *функцией* (см. 1.1.2).

2. Матричная (линейная) операция, оператором которой является матрица A — отображение векторного пространства \mathbb{R}^n в векторное пространство \mathbb{R}^m ($\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$) по правилу

$$y = Ax,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$.

3. Скалярное произведение $\langle x, z \rangle$ векторов $x = \{x_i\} \in \mathbb{R}^n$ и $z = \{z_i\} \in \mathbb{R}^n$ — билинейное отображение

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^1,$$

которое (по определенным правилам, см. [17]) паре векторов из пространства \mathbb{R}^n ставит в соответствие вещественное число (скаляр). К таким отображениям относится операция умножения вещественных чисел и более общая билинейная функция

$$\langle x, z \rangle = x^T Q z = z^T Q x,$$

где Q — симметрическая матрица: $Q = Q^T$. В частном случае при $Q = I$ получаем

$$\langle x, z \rangle = x^T z = x_1 z_1 + x_2 z_2 + \dots + x_n z_n.$$

Особое место среди преобразований рассматриваемого класса занимают *функциональные отображения*, т. е. отображения функций (функциональных пространств). К функциональным отображениям относятся функционалы и обратные функционалы.

Функционал — это правило, по которому каждой функции x ставится в соответствие число $J(x) \in \mathbb{R}$ (см. также п. 7.1). Например, квадратичный функционал

$$J(x) = \int_0^T x^2(t) dt,$$

определенный на множестве функций времени $x(t)$ ($t \in [0, T]$), функции $x(t)$ ставит в соответствие значение интегральной квадратичной оценки J , а оператор

$$t_n = \mathcal{F}(x(t))$$

переходной функции $x(t)$ ($t \in [0, \infty)$) ставит в соответствие значение времени переходного процесса t_n .

К функционалам относятся также *функциональные нормы* — отображение функций времени $f(t)$ ($t \in [0, \infty)$) на множество положительных чисел \mathbb{R}_+ :

$$\|f(t)\|_p = \left(\int_0^\infty |f(t)|^p dt \right)^{1/p},$$

$1 \leq p \leq \infty$ (см. также 1.1.2). Отметим, что

$$\|f(t)\|_\infty = \sup_t |f(t)|,$$

т. е. эта норма существует для ограниченных функций и соответствует верхней границе абсолютного значения функции: $|f(t)| \leq \|f(t)\|_\infty$.

Обратные функционалы каждому числу ставят в соответствие функцию. Так, решения дифференциального уравнения первого порядка являются отображением начальных значений (чисел) $x_0 \in \mathbb{R}$ на множество функций $x(t, x_0)$. Например, решение линейного дифференциального уравнения $\dot{x} = ax$ является обратным функционалом:

$$x(t, x_0) = e^{at} x_0.$$

К более общему классу функциональных операторов относятся операторы Лапласа

$$\mathcal{L}: X(s) = \mathcal{L}(x(t)),$$

которые функции времени $x(t)$ ставят в соответствие функцию комплексного переменного $X(s)$, и интегро-дифференциальные операторы (передаточные функции)

$$W(p) = \frac{a(p)}{b(p)},$$

которые функции $x(t)$ ставят в соответствие функцию $y(t)$:

$$y(t) = W(p) x(t)$$

(последнее подразумевает, что $y(t)$ является решением соответствующего дифференциального уравнения). В частности, оператор дифференцирования p устанавливает правило

$$y(t) = p x(t) = \frac{dx(t)}{dt},$$

а оператор интегрирования $1/p$ — правило

$$y(t) = \frac{1}{p} x(t) = y(0) + \int_0^t x(t)dt.$$

Определение 1.2. Отображение называется *линейным*, когда для любых x_1, x_2 оно удовлетворяет *свойству линейности*, т. е. подчиняется следующим условиям:

$$\mathcal{F}(x_1 + x_2) = \mathcal{F}(x_1) + \mathcal{F}(x_2),$$

$$\mathcal{F}(\alpha x_1) = \alpha \mathcal{F}(x_1),$$

где α — произвольное вещественное число.

Отображение называется *нелинейным*, когда оно не удовлетворяет свойству линейности.

К линейным относится функция $y = Kx$, оператор дифференцирования, оператор интегрирования, передаточная функция, оператор Лапласа, а типичным представителем нелинейного отображения является нелинейная функция.

1.1.2. Функции

Рассмотрим векторы $x = \{x_i\} \in \mathcal{X}$, $y = \{y_j\} \in \mathcal{Y}$, где $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^m$, и отображения линейных пространств (рис. 1.2, а).

Определение 1.3. *Функцией* называется правило (отображение)

$$f: \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y},$$

в соответствии с которым каждому элементу $x \in \mathcal{X}$ (аргументу) ставится в соответствие элемент (функция) $y \in \mathcal{Y}$:

$$y = f(x),$$

или, в развернутом виде,

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

...

$$y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

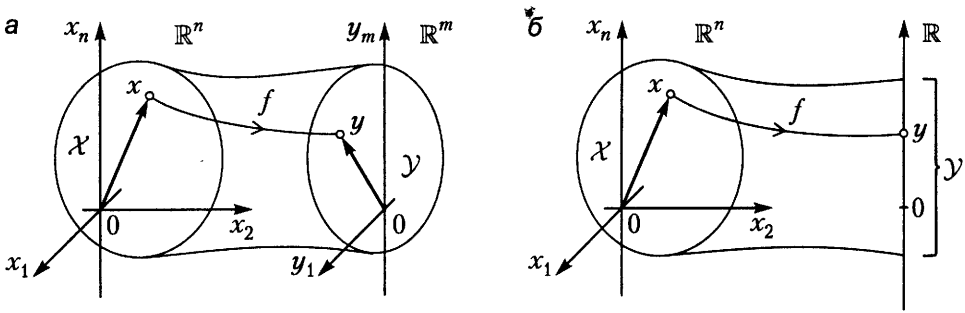


Рис. 1.2. Векторная (а) и скалярная (б) функции

Множество \mathcal{X} называется *множеством определения* функции, а множество \mathcal{Y} — *множеством значений* функции.

Такого рода функцию обычно называют *вектор-функцией*.

Частным случаем вектор-функции является скалярная функция чисел $y \in \mathbb{R}^1$ и скалярная функция многих переменных (аргументов)

$$y = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

(рис. 1.2, б).

Замечание 1.1. В общем случае функция определена на ограниченном множестве \mathcal{X} . Так, вещественная функция $y = \sqrt{x}$ определяется лишь для $x \geq 0$, функция $y = 1/x$ — для $x \in (-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$, а функция $y = \text{Arcsin } x$ — для $x \in [-1, 1]$. \square

Определение 1.4. Функция называется *линейной* функцией, когда для любых $x, z \in \mathbb{R}^n$, она удовлетворяет *свойству линейности*:

$$f(x + z) = f(x) + f(z),$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x),$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$ — произвольное число.

Функция называется *нелинейной*, когда она не удовлетворяет свойству линейности.

Представляют интерес следующие частные случаи функций.

1. Функция $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$y = Kx,$$

где K — вещественное число, с очевидностью является линейной.

2. Матричная операция $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$

$$y = Ax,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, также является линейной.

3. Квадратичная функция $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

$$z = x^T Q x,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$, $Q = Q^T$, является нелинейной функцией многих переменных.

4. Евклидова норма вектора x , которая вектору из пространства \mathbb{R}^n ставит в соответствие неотрицательное число:

$$|x|_Q = (x^T Q x)^{1/2},$$

где $Q = Q^T > 0$ (положительно определенная матрица), также является нелинейной функцией. В частном случае при $Q = I$, где I – единичная матрица, получаем единичную норму

$$|x| = (x^T x)^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Определение 1.5. Обратной функцией (рис. 1.3, а) называется правило (отображение)

$$f^{-1} : \mathcal{Y} \mapsto \mathcal{X}$$

или

$$x = f^{-1}(y),$$

которое удовлетворяет условию $f \circ f^{-1} = 1$, т. е.

$$f(f^{-1}(y)) = y.$$

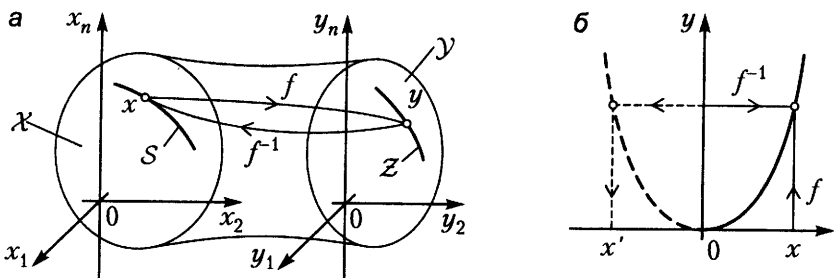


Рис. 1.3. Функция и обратная функция

Замечание 1.2. Функция (а также обратная функция) может иметь не единственные значения, т. е. быть *неоднозначной*.

Так, функция $y = \text{Arcsin } x$ имеет бесчисленное множество значений для любого $x \in [-1, 1]$; для функции $y = \sin x$ обратная функция $x = \text{Arcsin } y$ имеет бесчисленное множество значений, а для функции $y = x^2$ обратная функция $x = \pm\sqrt{y}$ (при $x \neq 0$) имеет два значения (рис. 1.3, б). \square

Определение 1.6. Функция $f: \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ называется *взаимно однозначной функцией*, или *биекцией*, когда для любых $x \in \mathcal{X}$ и $y \in \mathcal{Y}$ прямое f и обратное f^{-1} отображения единственны (однозначны), т. е. каждому значению $x \in \mathcal{X}$ соответствует единственное значение $y \in \mathcal{Y}$, и наоборот.

Замечание 1.3. Необходимым условием взаимной однозначности является равенство размерностей соответствующих пространств: $m = n$. \square

Замечание 1.4. Вопросы существования и единственности функции и обратной функции зависят от области значений. Так, вещественная функция $y = x^2$ определена и является взаимно однозначной только при $x \geq 0$, а функция $y = \arcsin x$ («главное значение») определена и взаимно однозначна для $x \in [-1, 1]$. \square

Введем классификацию функций, связанную со свойствами *непрерывности* и *гладкости*. Сначала рассмотрим скалярные функции многих переменных $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенные на множестве $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 1.7. Скалярная функция $y = f(x)$ называется:

функцией класса C^0 , если при $x \in \mathcal{X}$ она непрерывна;

функцией класса C^1 , или (простейшей) гладкой функцией, если при $x \in \mathcal{X}$ она непрерывна и дифференцируема по всем переменным x_i (имеет первые частные производные $\partial f / \partial x_i$);

функцией класса C^k , если при $x \in \mathcal{X}$ она непрерывна и k раз дифференцируема (имеет k частных производных);

функцией класса C^∞ , или (бесконечно) гладкой функцией, если при $x \in \mathcal{X}$ она имеет частные производные сколь угодно высокого порядка.

Запись

$$f(x) \in C^k,$$

где k принимает значения от 0 до ∞ , означает принадлежность функции $f(x)$ одному из рассмотренных классов гладкости. Функции $f(x)$, допускающие разрывы (только) первого рода, образуют более широкий класс \overline{C} *кусочно-непрерывных функций*: $f(x) \in \overline{C}$.

Градиентом гладкой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется вектор-строка частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|$$

либо столбцовая вектор-функция

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T.$$

Градиент служит представителем математических объектов, называемых *ковекторами*¹ и являющихся элементами сопряженного пространства \mathbb{R}^n .

Рассмотрим векторные функции многих переменных $y = f(x) = \{f_j(x)\}$ (отображения $f: \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^m$).

Определение 1.8. Векторная функция $y = f(x)$ называется *функцией класса* C^0 , C^1 , C^k или C^∞ , если на множестве \mathcal{X} все скалярные функции f_j принадлежат классам C^0 , C^1 , C^k или C^∞ соответственно.

Функция является «достаточно» гладкой, если она удовлетворяет *условию Липшица*.

Определение 1.9. Векторная функция $y = f(x)$ называется (*локально*) *липшицевой в точке* $x \in \mathcal{X}$, если найдутся числа $\delta > 0$ и $L = L(\delta)$ (*постоянная Липшица*) такие, что для любых x^* : $|x - x^*| < \delta$ выполняется

$$|f(x) - f(x^*)| \leq L|x - x^*|. \quad (1.1)$$

Векторная функция $y = f(x)$ называется *глобально липшицевой* на множестве \mathcal{X} , если для любых $x, x^* \in \mathcal{X}$ найдется не зависящая от x, x^* постоянная Липшица L .

Отметим, что условие локальной липшицевости в точках области \mathcal{X} предусматривает по меньшей мере равномерную непрерывность функции $f(x)$ и всегда выполняется для функций класса C^2 , имеющих во всех точках \mathcal{X} непрерывные частные производные $\partial f_j / \partial x_i$ [31]. Глобальное условие требует еще и ограниченности производных $\partial f_j / \partial x_i$ на множестве \mathcal{X} или (при $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$) во всем пространстве \mathbb{R}^n .

Матрицей Якоби гладкой вектор-функции $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ называется функциональная матрица частных производных размера $m \times n$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{vmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \partial f_1 / \partial x_2 & \dots & \partial f_1 / \partial x_n \\ \partial f_2 / \partial x_1 & \partial f_2 / \partial x_2 & \dots & \partial f_2 / \partial x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial f_m / \partial x_1 & \partial f_m / \partial x_2 & \dots & \partial f_m / \partial x_n \end{vmatrix}.$$

Пусть $m \leq n$.

¹В дифференциальной геометрии вектор и ковектор относятся к простейшим тензорам, определения которых даются с помощью правила их преобразования при изменении системы координат [7, 28].

Определение 1.10. Векторная функция $y = f(x)$ в точке $x = x^* \in \mathcal{X}$ называется *отображением ранга* $\mu \leq m$ (обозначается $\text{rank } f(x^*) = \mu$), если

$$\text{rank } \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*} = \mu,$$

и *регулярным (невырожденным) отображением*, если $\text{rank } f(x^*) = m$.

Если $m = n$, то определитель матрицы Якоби называется *якобианом*, и отображение f не вырождено в точке $x = x^*$, когда

$$\det \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*} \neq 0.$$

Пусть $m = n$.

Определение 1.11. Векторная функция $y = f(x)$ (отображение $f : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$) называется *диффеоморфизмом*, если:

- 1) функция f гладкая: $f \in C^\infty$;
- 2) отображение взаимно однозначно (биективно);
- 3) обратная функция $x = f^{-1}(y)$ (отображение $f^{-1} : \mathcal{Y} \mapsto \mathcal{X}$) существует и гладкая: $f^{-1} \in C^\infty$.

Важным свойством диффеоморфизма является сохранение гладкости кривых при отображениях f и f^{-1} (см. рис. 1.3, а, кривые $\mathcal{S} \in \mathcal{X}$ и $\mathcal{Z} \in \mathcal{Y}$).

Различают локальный и глобальный диффеоморфизмы. Понятие *глобального диффеоморфизма* подразумевает, что функция f определена на всем пространстве \mathbb{R}^n ($f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{Y}$) и указанные свойства отображения имеют место для любых значений $x \in \mathbb{R}^n$, т. е. глобально. Для *локального диффеоморфизма* указанные свойства отображения f имеют место в некоторой окрестности точки $x^* \in \mathcal{X}$, т. е. локально.

Рассмотрим следующие примеры.

1. Функция $y = 1/x$ при $x \in (-\infty, \infty)$ не является гладкой (претерпевает разрыв в точке $x = 0$). Тем не менее в области $x \in (0, \infty)$ отображение — гладкое, взаимно однозначное и имеет гладкое обратное отображение.
2. Функция $y = x^2$ при $x \in (-\infty, \infty)$ является гладкой, однако не взаимно однозначна (рис. 1.3, б). Тем не менее в области $x \in (0, \infty)$ отображение — гладкое, взаимно однозначное, и обратное отображение $x = \sqrt{y}$ также является гладким.
3. Функция $y = x^3$ при $x \in (-\infty, \infty)$ является гладкой и взаимно однозначной. Обратное отображение $x = \sqrt[3]{y}$ является непрерывной функцией. Однако производная от обратной функции $x' = 1/(3y^{2/3})$ претерпевает разрыв в точке $y = 0$, и следовательно, обратная функция не является гладкой.

4. Функция $y = \sin x$ при $x \in (-\infty, \infty)$ является гладкой, но не взаимно однозначной. Тем не менее в области $(-\pi/2, \pi/2)$ отображение является гладким, взаимно однозначным и имеет гладкое обратное отображение $x = \arcsin y$.

Основная сложность установления свойства диффеоморфизма произвольной функции связана с нахождением обратного отображения. Для случая *локального* диффеоморфизма эта проблема разрешается с помощью следующей теоремы.

Теорема об обратной функции. Гладкое отображение $f(x) : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ является локальным диффеоморфизмом в окрестности точки $x^* \in \mathcal{X}$ тогда и только тогда, когда $\text{rank } f(x^*) = n$, т. е.

$$\det \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*} \neq 0.$$

Рассмотрим следующие примеры.

1. Для функции $y = x^3$ в точке $x^* = 0$ найдем

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0 = \left. 3x^2 \right|_0 = 0.$$

Это сразу же показывает, что функция не является диффеоморфизмом в любой области, содержащей точку 0.

2. Для функции $y = x + x^3$ в точке $x^* = 0$ найдем

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0 = \left. 1 + 3x^2 \right|_0 = 1,$$

поэтому функция является локальным диффеоморфизмом. Нетрудно показать, что в данном случае свойства гладкости прямой и обратной функции, а также взаимной однозначности отображения сохраняются на всем множестве \mathbb{R} , т. е. рассматриваемая функция является *глобальным* диффеоморфизмом.

3. Для функции $y = \sin x$ при $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ найдем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x > 0,$$

т. е. в окрестности любой точки указанной области функция является локальным диффеоморфизмом.

Введем классификацию функций времени $f(t)$, связанную с существованием тех или иных *функциональных норм* $\|f(t)\|_p$ (см. 1.1.1).

Определение 1.11а. Функция $y = f(t)$ ($t \in [0, \infty)$) называется *функцией класса* \mathcal{L}_p ($1 \leq p \leq \infty$), когда существует неотрицательное число l_p такое, что

$$\|f(t)\|_p \leq l_p.$$

Функции $f(t) \in \mathcal{L}_1$, для которых норма

$$\|f(t)\|_1 = \int_0^\infty |f(t)| dt$$

ограничена, называются *интегрально ограниченными*, а функции $f(t) \in \mathcal{L}_\infty$, для которых

$$\|f(t)\|_\infty = \sup |f(t)| \leq l_\infty,$$

— просто *ограниченными* функциями.

Непрерывная функция $f(t) \in C^0$ ($t \in [0, \infty)$), имеющая ограниченную производную $f(t) \in \mathcal{L}_\infty$, называется *равномерно непрерывной*. Интегрально ограниченные равномерно непрерывные функции обладают следующим свойством.

Лемма Барбалата. Если функция $f(t)$ ($t \in [0, \infty)$) удовлетворяет условиям

$$f(t) \in C^0, \quad \dot{f}(t) \in \mathcal{L}_\infty, \quad f(t) \in \mathcal{L}_1,$$

то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0.$$

1.1.3. Векторные поля и распределения

Важным представителем гладких отображений является векторное поле (рис. 1.4, а).

Определение 1.12. Гладкое отображение $f(x) : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}^n$, которое каждой точке $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ ставит в соответствие вектор $f = \{f_i\} \in \mathbb{R}^n$, называется *гладким векторным полем*.

Примером векторного поля может служить поле скоростей множества кривых (линий потока, фазовых траекторий), заданных в пространстве \mathbb{R}^n (см. 2.1.1 и рис. 2.1, в).

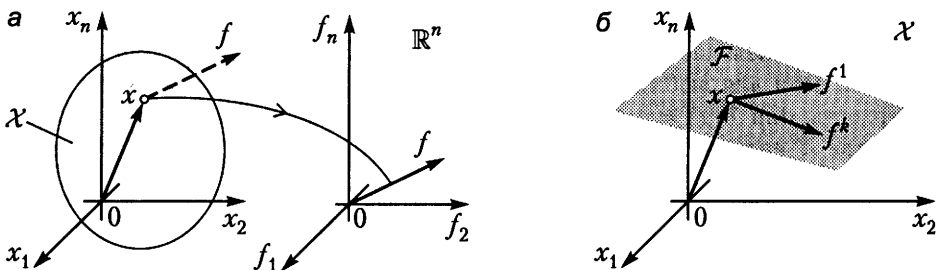


Рис. 1.4. Векторное поле (а) и распределение (б)

Пусть $\varphi(x)$ — гладкая функция и $f(x)$ — гладкое векторное поле на множестве $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$. Скалярная функция, определенная как

$$\mathcal{L}_f \varphi(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} f(x),$$

называется *производной Ли от скалярной функции φ* вдоль векторного поля f .

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — гладкие векторные поля на множестве \mathcal{X} . Векторное поле, определенное как

$$\mathcal{L}_f g(x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x),$$

называется *производной Ли от вектора g* вдоль векторного поля f , или *скобкой Ли*:

$$[f(x), g(x)] = \mathcal{L}_f g(x).$$

Вводится также понятие производной нулевого порядка

$$\mathcal{L}_f^0 g(x) = g(x),$$

а также сложные производные Ли

$$\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f = \mathcal{L}_g(\mathcal{L}_f), \quad \mathcal{L}_f^k = \mathcal{L}_f(\mathcal{L}_f^{k-1}), \quad k = 2, 3, \dots$$

Пусть $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ — гладкие векторные поля на множестве $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 1.13. Отображение $\mathcal{F}(x) : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}^n$, которое каждой точке $x \in \mathcal{X}$ ставит в соответствие подпространство (гиперплоскость)

$$\mathcal{F}(x) = \text{span}\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\} \in \mathbb{R}^n,$$

называется *гладким распределением* на множестве \mathcal{X} .

Таким образом, распределение $\mathcal{F}(x)$ в каждой точке x определяет гиперплоскость, натянутую на векторы $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ (рис. 1.4, б). В частном случае при $k = 1$ распределение вырождается в векторное поле.

Гладкое распределение на \mathcal{X} называется *невыврожденным (регулярным)* распределением, если для любых $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ подпространство $\mathcal{F}(x)$ имеет постоянную размерность: $\dim \mathcal{F}(x) = \nu = \text{const}$ ($k \leq \nu < n$). Регулярное распределение $\mathcal{F}(x)$ на множестве \mathcal{X} называется *инволютивным*, если для любых $x \in \mathcal{X}$ и произвольных векторов $f_1(x), f_2(x) \in \mathcal{F}(x)$ выполняется

$$[f_1(x), f_2(x)] \in \mathcal{F}(x).$$

1.1.4. Гиперповерхности, поверхности и кривые

Введем в рассмотрение $(n - \nu)$ -мерную гладкую в области \mathcal{X} вектор-функцию $\varphi = \{\varphi_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n - \nu$, $\nu < n$. Нелинейное уравнение

$$\varphi(x) = 0. \quad (1.2)$$

определяет (в неявной форме) многомерный геометрический объект (рис. 1.5)

$$\mathcal{S}^* = \{x \in \mathcal{X} : \varphi(x) = 0\}.$$

Если вектор-функция φ удовлетворяет *условию регулярности*:

$$\text{rank } \varphi(x) = n - \nu, \quad (1.3)$$

то уравнения системы (1.2) независимы, и множество \mathcal{S}^* относится к классу *гладких гиперповерхностей* (многообразий) размерности ν .

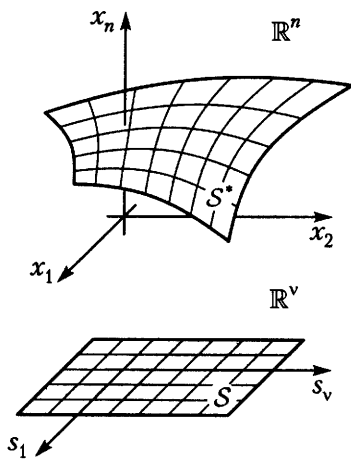


Рис. 1.5. Гиперповерхность и карта

В частном случае при $\nu = n - 1$, т. е. когда множество \mathcal{S}^* описывается скалярным уравнением (1.2), соответствующий геометрический объект называется просто *поверхностью*. При наличии большего числа линейно независимых уравнений и $\nu < n - 1$ множество является пересечением нескольких поверхностей. При $\nu = 1$, когда \mathcal{S}^* описывается системой $n - 1$ уравнения (1.2) и, следовательно, является пересечением $n - 1$ поверхности, рассматриваемое множество является *кривой* (см. рис. 1.6, б). Наконец, при наличии n уравнений и $\nu = 0$ множество \mathcal{S}^* вырождается в точку (множество размерности 0).

Примерами гиперповерхностей служат следующие геометрические объекты:

1. Кривые на плоскости: парабола

$$x_1^2 + x_2 = 0$$

и окружность

$$x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0.$$

2. Поверхности в трехмерном пространстве: плоскость

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

сфера

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2 = 0$$

и круговой цилиндр

$$x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0, \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

3. Эллипс в трехмерном пространстве и другие типы пространственных кривых (*конических сечений*), задаваемых уравнениями

$$x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0, \quad a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

В окрестности произвольной точки $x^* \in S^*$ можно ввести *систему локальных координат* гиперповерхности $\{s_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, \nu$) и *вектор локальных координат* $s = \{s_i\} \in \mathcal{S}$, заданный в некоторой области $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^\nu$ (см. рис. 1.5). Локальные координаты определяются с помощью выражения

$$s = \psi(x), \tag{1.4}$$

где $\psi = \{\psi_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, \nu$) – гладкая вектор-функция. Область $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^\nu$ вместе с координатной системой называется *картой гиперповерхности* (многообразия) S^* .

В окрестности произвольной точки x^* гладкая гиперповерхность S^* может быть описана также в *параметрической* форме (т. е. как *подмногообразие*)

$$x = r_s(s), \tag{1.5}$$

где для всех $s \in \mathcal{S}$ имеет место

$$\text{rank } r_s(s) = \nu$$

и $\varphi \circ r = 0$, т. е.

$$\varphi(r_s(s)) = 0. \tag{1.6}$$

Отметим, что в общем случае для полного описания поверхности нужно задать несколько координатных систем и несколько карт (*атлас*), каждая из которых

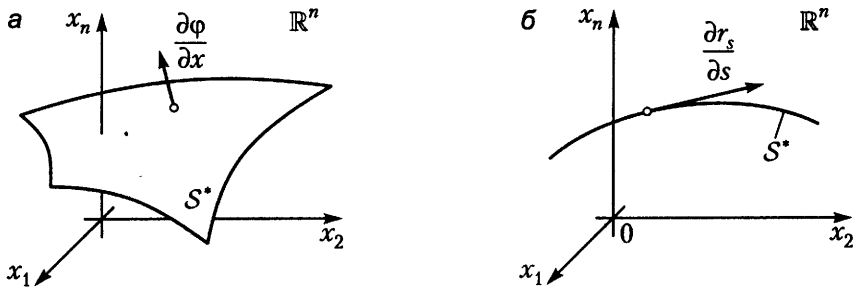


Рис. 1.6. Градиент и касательный вектор

соответствует определенному куску множества S^* . Так, для описания окружности и сферы требуется как минимум две карты (см. [7, 28]).

Векторы $\partial r_s / \partial s_i$ для любых точек $x \in S^*$ касательны к поверхности S^* , а вектор-строки $\partial \varphi_i / \partial x$ (ковекторы, или градиенты, см. 1.1.2) для $x \in S^*$ ортогональны к S^* (рис. 1.6).

Пример 1.1. Рассмотрим окружность радиуса R (см. также пример 5.2):

$$x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0. \quad (1.7)$$

Для проверки свойства регулярности найдем градиент

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right| = 2|x_1 \ x_2|.$$

Последнее выражение в каждой точке $(x_1, x_2) \in S^*$ определяет нормаль к окружности и (в этих точках) не обращается в нуль. Следовательно, окружность является регулярной кривой (гладкой гиперповерхностью размерности 1).

В окрестности точки $(R, 0)$ можно ввести локальную координату

$$s = R \operatorname{Arctg} \frac{x_2}{x_1}. \quad (1.8)$$

Координата $s \in (-\pi R, \pi R)$ определяет путь («длину» дуги) во всех точках S^* кроме $(-R, 0)$.

Переменная s используется также как «параметр» параметрического описания окружности

$$x_1 = R \cos \frac{s}{R}, \quad x_2 = R \sin \frac{s}{R}. \quad (1.9)$$

Касательные векторы находятся как

$$\begin{vmatrix} \partial r_{s1}/\partial s \\ \partial r_{s2}/\partial s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin(s/R) \\ \cos(s/R) \end{vmatrix}. \quad (1.10)$$

□

Простейшими многомерными геометрическими объектами рассмотренного типа являются центральные *гиперплоскости*, которые могут быть заданы в виде

$$S^* : \Phi_0 x = 0, \quad (1.11)$$

где $\Phi_0 = \{\Phi_{0i}^T\}$ — $n \times (n - \nu)$ -матрица полного ранга со строками Φ_{0i}^T . Последние являются градиентами функции $\Phi_0 x = 0$ и, следовательно, ортогональны плоскости. В частном случае при $\nu = n - 1$ рассматриваемый объект является плоскостью, а при $\nu = 1$ — прямой, проходящей через точку 0.

Параметрическая форма гиперплоскости имеет вид

$$x = R_s s, \quad (1.12)$$

где $s \in \mathbb{R}^\nu$, $R_s = \{R_{si}\}$ — $n \times \nu$ -матрица полного ранга со столбцами R_{si} , удовлетворяющая уравнению

$$\Phi_0 R_s = 0.$$

Последнее выражение показывает, что столбцовые векторы R_{si} ортогональны градиентам Φ_{0i} и, следовательно, принадлежат рассматриваемой плоскости. Тогда плоскость может быть определена как ν -мерное подпространство, натянутое на векторы R_{si} :

$$\mathfrak{R}_s = \text{span}\{R_{si}\}.$$

1.2. Модели нелинейных систем

Динамическая система называется нелинейной, если ее математическая модель содержит нелинейные операторы (отображения, функции). *Линейная* система, являясь частным случаем нелинейных систем, описывается с помощью операторов, обладающих свойством линейности (см. определение 1.4), и может быть представлена в виде совокупности простейших линейных блоков, называемых звеньями [4, 24]. Естественно, что модель нелинейной системы содержит как типовые линейные звенья, так и специальные блоки, описываемые с помощью нелинейных функций или операторов.

1.2.1. Нелинейные звенья

В зависимости от свойств математической модели различают статические и динамические, а также гладкие и негладкие блоки нелинейной системы.

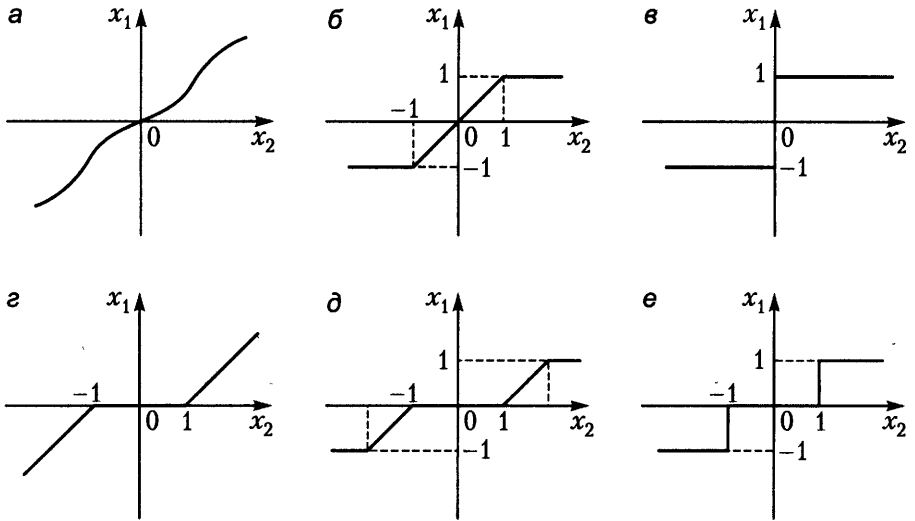


Рис. 1.7. Канонические нелинейные блоки (статические)

Статические звенья описываются алгебраическим или трансцендентным уравнением

$$x_1 = f(x_2), \quad (1.13)$$

где f — нелинейная функция.

Для *гладких* блоков функция f достаточно гладкая: $f \in (C^1, C^2, \dots)$ (рис. 1.7, а), в то время как *негладкие* блоки описываются либо с помощью разрывной, либо — непрерывной, но не гладкой функции, т. е. $f \in (\overline{C}, C^0)$.

Канонические (приведенные) негладкие блоки описываются уравнением вида

$$x_1 = f^0(x_2). \quad (1.14)$$

В зависимости от f^0 различают:

- звено с насыщением (ограничением) $x_1 = \text{sat } x_2$ (рис. 1.7, б);
- релейное звено $x_1 = \text{sign } x_2$ (рис. 1.7, в);
- звено с зоной нечувствительности (рис. 1.7, г);
- звено с насыщением и зоной нечувствительности (рис. 1.7, д);
- релейное звено с зоной нечувствительности $x_1 = \text{dez } x_2$ (рис. 1.7, е).

Для канонических звеньев предполагается, что линейный участок характеристики имеет единственный наклон, а уровни насыщения, границы линейной области или

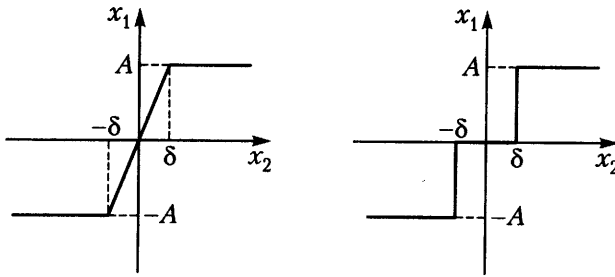


Рис. 1.8. Статические блоки — общий случай

зоны нечувствительности равны $+1$ и -1 . В общем случае негладкие звенья могут быть описаны выражением

$$x_1 = A f^0\left(\frac{x_2}{\delta}\right), \quad (1.15)$$

где A — параметр, характеризующий уровень насыщения, а δ — параметр, характеризующий величину зоны нечувствительности или линейной зоны (рис. 1.8).

Определение 1.14. Статический нелинейный блок называется *положительным*, если для любых входных сигналов x_2 произведение вход-выход положительно, т. е.

$$x_1 x_2 > 0.$$

Очевидно, что последнему условию удовлетворяют блоки, характеристика которых расположена в I и III квадрантах. К положительным относятся все блоки, представленные на рис. 1.7, а блок $x_2 = \sin x_1$ с очевидностью не удовлетворяет указанному условию.

Динамические звенья описываются дифференциальными уравнениями первого или второго порядка

$$a(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1) = b(x_2, \dot{x}_2), \quad (1.16)$$

где $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ — нелинейные функции. В некоторых широко распространенных частных случаях уравнение (1.16) приводится к виду

$$x_1 = c(x_2, \text{sign } \dot{x}_2), \quad (1.17)$$

где $c(\cdot)$ — нелинейная функция. С помощью такого уравнения часто описываются гладкие динамические блоки (рис. 1.9, а) и негладкие звенья типа

- *люфт* (рис. 1.9, б);
- *гистерезис* (рис. 1.9, в – 1.9, з):

$$x_1 = \text{hys}(x_2, \text{sign } \dot{x}_2),$$

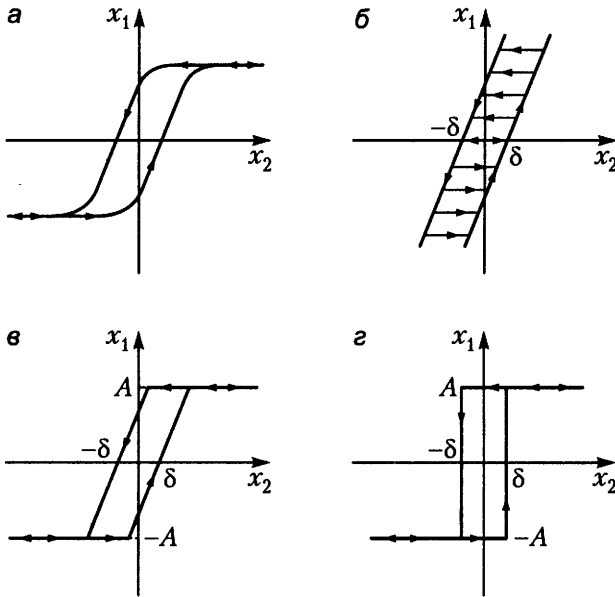


Рис. 1.9. Динамические нелинейные блоки

в которых выбор той или иной ветви характеристики определяется направлением изменения входной переменной x_2 , т. е. знаком функции \dot{x}_2 .¹

Определение 1.15. Динамический нелинейный блок называется *положительным*, если для любых входных сигналов $x_2(t)$ и $t \geq 0$ показатель В. М. Попова

$$\eta(t) = 2 \int_0^t x_1(\tau) x_2(\tau) d\tau$$

удовлетворяет следующему условию (*неравенству В. М. Попова*):

$$\eta(t) \geq -V_0, \quad (1.18)$$

где $V_0 \geq 0$.

Очевидно, что неравенству В. М. Попова удовлетворяют статические положительные блоки, для которых подынтегральное выражение положительно и, следовательно, интеграл всегда больше нуля. Положительным блоком является также аperiodическое звено и интегратор.

Пример 1.2. Рассмотрим блок (интегрирующее звено)

$$\dot{x}_1 = K x_2.$$

¹Строго говоря, поведение нелинейных блоков с неоднозначными петлевыми характеристиками как правило зависит от предыстории сигнала $x_1(t)$, что также следует учитывать при построении их моделей.

Находим:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t x_1(\tau)x_2(\tau)d\tau &= \frac{2}{K} \int_0^t x_1(\tau)\dot{x}_1(\tau)d\tau = \\ &= \frac{2}{K} \int_{x_1(0)}^{x_1(t)} x_1 dx_1 = \frac{1}{K} x_1^2 \Big|_{x_1(0)}^{x_1(t)} \geq -\frac{1}{K} x_1^2(0). \end{aligned}$$

Таким образом, звено удовлетворяет неравенству (1.18), где $V_0 = x_{10}^2/K \geq 0$, и, следовательно, относится к положительным блокам.

Примером более сложного положительного блока является нестационарная система вида

$$x_1 = r(t) \theta, \quad \dot{\theta} = r(t) x_2,$$

где $r(t)$ — произвольная функция времени. □

1.2.2. Соединение нелинейных звеньев

Сначала рассмотрим различные варианты соединения *статических* нелинейных звеньев.

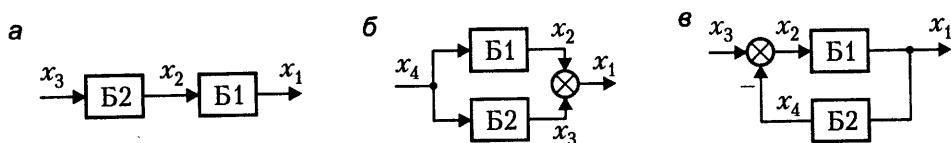


Рис. 1.10. Соединения нелинейных блоков

Последовательное соединение (рис. 1.10, а) описывается системой уравнений

$$B1: x_1 = f_1(x_2), \quad (1.19)$$

$$B2: x_2 = f_2(x_3). \quad (1.20)$$

После подстановки (1.19) в (1.20) получим уравнение связи выходной переменной x_1 с входом x_3 :

$$x_1 = f_1(f_2(x_3)) \quad (1.21)$$

или

$$x_1 = f(x_3), \quad (1.22)$$

где $f(\cdot)$ — сложная функция:

$$f = f_1 \circ f_2 = f_1(f_2).$$

В частном случае, когда $f_2 = f_1^{-1}$, получаем простейшую линейную зависимость $x_1 = x_3$.

Параллельное соединение (рис. 1.10, б) описывается системой уравнений

$$x_1 = x_2 + x_3, \quad (1.23)$$

$$\text{Б1: } x_2 = f_1(x_4), \quad (1.24)$$

$$\text{Б2: } x_3 = f_2(x_4). \quad (1.25)$$

Связь выходной переменной x_1 с входом x_4 определяется как

$$x_1 = f_1(x_4) + f_2(x_4). \quad (1.26)$$

В частном случае, когда $f_1 = f_2$, получаем

$$x_1 = 2 f_1(x_4).$$

Подключение в (отрицательную) обратную связь (рис. 1.10, в) описывается системой уравнений

$$\text{Б1: } x_1 = f_1(x_2), \quad (1.27)$$

$$\text{Б2: } x_4 = f_2(x_1), \quad (1.28)$$

$$x_2 = x_3 - x_4. \quad (1.29)$$

После подстановок находим

$$x_1 = f_1(x_3 - f_2(x_1)) \quad (1.30)$$

или

$$f_1^{-1}(x_1) + f_2(x_1) = x_3 \quad (1.31)$$

Из последнего выражения следует попытаться найти явное выражение вида (1.22).

В частном случае, когда $f_1 = kx_2$, получаем

$$x_1/k + f_2(x_1) = x_3. \quad (1.32)$$

При $k \rightarrow \infty$ последнее выражение принимает вид

$$f_2(x_1) = x_3$$

и, следовательно,

$$x_1 = f_2^{-1}(x_3),$$

т. е. подключение нелинейного звена в отрицательную обратную связь к пропорциональному звену с достаточно большим коэффициентом усиления позволяет получить обратную функцию.

Аналогичный результат (для некоторой ограниченной области изменения x_3) может быть получен при $f_1 = \text{sign } x_2$.

Нетрудно показать, что в другом частном случае, когда $f_1 = kx_2$, а $f_2 = (1/p)x_4$, т. е. если в обратную связь подключается интегратор, уравнение связи входных и выходных переменных при $k \rightarrow \infty$ принимает вид

$$\frac{1}{p}x_1 = x_3$$

или

$$x_1 = \dot{x}_3.$$

Таким образом, такое подключение интегратора позволяет получить идеальное дифференцирующее звено.

Теперь проанализируем свойства соединений *положительных динамических блоков* (см. определение 1.15). Рассмотрим *параллельное соединение* (рис. 1.10, б):

$$x_1 = x_2 + x_3, \quad (1.33)$$

$$\text{Б1: } x_2 = \mathcal{F}_1(x_4), \quad (1.34)$$

$$\text{Б2: } x_3 = \mathcal{F}_2(x_4), \quad (1.35)$$

где \mathcal{F}_i — операторы, удовлетворяющие условию Попова, т. е.

$$\eta_1(t) = 2 \int_0^t x_2 x_4 d\tau \geq -V_1, \quad \eta_2(t) = 2 \int_0^t x_3 x_4 d\tau \geq -V_2, \quad (1.36)$$

V_1, V_2 — неотрицательные числа. Найдем показатель Попова для системы с входом x_4 и выходом x_1 :

$$\eta(t) = 2 \int_0^t x_1 x_4 d\tau = 2 \int_0^t (x_2 + x_3) x_4 d\tau = 2 \int_0^t x_2 x_4 d\tau + 2 \int_0^t x_3 x_4 d\tau.$$

Принимая во внимание (1.36), получаем неравенство Попова

$$\eta(t) \geq -V_0, \quad (1.37)$$

где $V_0 = V_1 + V_2 \geq 0$. Таким образом, *параллельное соединение положительных блоков является положительным блоком*.

Рассмотрим *подключение в обратную связь* (рис. 1.10, в):

$$\text{Б1: } x_1 = \mathcal{F}_1(x_2), \quad (1.38)$$

$$\text{Б2: } x_4 = \mathcal{F}_2(x_1), \quad (1.39)$$

$$x_2 = x_3 - x_4, \quad (1.40)$$

где \mathcal{F}_i — операторы, удовлетворяющие условию Попова, т. е.

$$\eta_1(t) = 2 \int_0^t x_1 x_2 d\tau \geq -V_1, \quad \eta_2(t) = 2 \int_0^t x_4 x_1 d\tau \geq -V_2, \quad (1.41)$$

и V_1, V_2 — неотрицательные числа. Найдем показатель Попова для системы с входом x_3 и выходом x_1 :

$$\eta(t) = 2 \int_0^t x_1 x_3 d\tau = 2 \int_0^t x_1(x_2 + x_4) d\tau = 2 \int_0^t x_1 x_2 d\tau + 2 \int_0^t x_1 x_4 d\tau.$$

Принимая во внимание (1.41), получаем неравенство Попова (1.37), где $V_0 = V_1 + V_2 \geq 0$. Таким образом, *подключение положительных блоков в отрицательную обратную связь также дает положительный блок.*

Примером рассмотренного соединения служит подключение пропорционального звена в отрицательную обратную связь к интегрирующему звену. При условии положительности коэффициентов обоих звеньев получающееся при этом апериодическое звено с очевидностью является положительным.

1.2.3. Основные динамические модели

Соединение линейных и нелинейных звеньев, обычно характеризующих реальные физические процессы, позволяет получить полное описание (модель) рассматриваемой динамической системы. Наиболее распространенные модели нелинейных систем представлены системой обыкновенных дифференциальных уравнений в форме Коши или соответствующим векторным уравнением.

Автономная система с одним выходом может быть описана n уравнениями состояния

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1.42)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1.43)$$

...

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.44)$$

и скалярным уравнением выхода

$$y = h(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1.45)$$

где x_i — переменные состояния, y — выходная переменная, $f_i(\cdot)$ и $h(\cdot)$ — функции, определенные на соответствующих множествах. Введем в рассмотрение n -мерный вектор состояния системы $x = \{x_i\}$, определенный на множестве $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, и n -мерную вектор-функцию $f = \{f_i\} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Перепишем уравнения (1.42)–(1.45) в векторной форме:

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.46)$$

$$y = h(x). \quad (1.47)$$

В частном случае уравнения (1.46)–(1.47) принимают вид

$$\dot{x} = Ax, \quad (1.48)$$

$$y = cx. \quad (1.49)$$

где A , c — матрицы соответствующих размерностей. Здесь $f(x) = Ax$ и $h(x) = cx$ — линейные отображения, и поэтому система (1.48)–(1.49) является *линейной*.

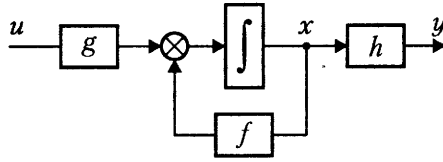


Рис. 1.11. Нелинейная система (аффинная)

Управляемая одноканальная система (объект управления с одним входом и одним выходом) может быть описана n уравнениями состояния

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)u, \quad (1.50)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + g_2(x_1, x_2, \dots, x_n)u, \quad (1.51)$$

...

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)u \quad (1.52)$$

и уравнением выхода (1.45), где u — входное (управляющее) воздействие, $g_i(\cdot)$ — функции, определенные на множестве \mathcal{X} . Отметим, что система является линейной по управлению u , или *аффинной*.

Введем в рассмотрение n -мерную вектор-функцию $g = \{g_i\} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Перепишем уравнения (1.50)–(1.52), (1.45) в векторной форме (рис. 1.11):

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (1.53)$$

$$y = h(x). \quad (1.54)$$

В большинстве практических случаев работа объекта управления происходит в условиях действия целого ряда возмущающих факторов (возмущений). Модель *нелинейного объекта с аддитивным скалярным возмущением* $w(t)$ описывается уравнениями

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + d(x)w \quad (1.55)$$

и (1.54), где $d = \{d_i\}$ — n -мерная вектор-функция. Система (1.55), (1.54) является *аффинной* как по отношению к управлению u , так и возмущению w .

Частным случаем рассмотренной выше системы является возмущенный линейный объект управления вида

$$\dot{x} = Ax + bu + dw, \quad (1.56)$$

$$y = cx, \quad (1.57)$$

где b , d — постоянные (не зависящие от x) столбцовые матрицы.

Более общий класс нелинейных систем составляют системы, для которых уравнения состояния содержат нелинейные функции управления u , т. е.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)f_u(u), \quad (1.58)$$

где $f_u(\cdot)$ — скалярная функция. Наконец, наиболее общее представление одноканальной нелинейной системы дается уравнениями вида

$$\dot{x} = f(x, u, w), \quad (1.59)$$

$$y = h(x, u, w). \quad (1.60)$$

Определение 1.16. Нелинейная динамическая система называется *гладкой системой*, если соответствующие функции f, g, h являются гладкими во всех точках множества \mathcal{X} .

Глава 2. Переходные процессы и особенности нелинейной динамики

Нахождение переходного процесса требует решения дифференциального уравнения — математической модели системы. Для *линейных* стационарных систем такие решения известны и легко могут быть получены в аналитической или графической форме (см., например, [1, 2, 8, 17, 24]). Общая процедура решения (интегрирования) *нелинейных* дифференциальных уравнений отсутствует. Это определяет необходимость изучения приближенных методов построения переходных процессов и привлечения численных методов интегрирования. С другой стороны, сама задача построения единичного переходного процесса и нахождения соответствующего частного решения нелинейного дифференциального уравнения обычно не имеет определяющего значения для анализа сложной системы и выбора алгоритмов управления. Наибольший интерес представляют общие (групповые) свойства динамических моделей, общие закономерности и особенности их поведения, позволяющие выявить нежелательные режимы работы и выработать наилучшую стратегию управления.

2.1. Интегральные кривые и фазовые траектории

2.1.1. Основные понятия

Рассмотрим автономную динамическую систему, описываемую уравнением

$$\dot{x} = f(x). \quad (2.1)$$

Будем полагать, что $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, где \mathcal{X} — открытое множество, и $x_0 = x(0)$ — вектор начальных состояний (начальных значений).

Дифференциальное уравнение (2.1) каждой точке $x \in \mathcal{X}$ ставит в соответствие вектор скорости системы $\dot{x} = f \in \mathbb{R}^n$, а каждому начальному значению x_0 — функцию $x(t)$, являющуюся частным решением уравнения.

Определение 2.1. Векторным полем динамической системы (2.1) называется отображение $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}^n$, которое каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие вектор $f \in \mathbb{R}^n$ (см. 1.1.3).

Решением динамической системы (2.1) (дифференциального уравнения) с начальными значениями $x = x_0$, или интегральной кривой, называется непрерывная функция

$$x(t) = x(t, x_0), \quad (2.2)$$

определенная на некотором интервале времени $[0, T)$, где $T > 0$, и удовлетворяющая условиям:

$$1) \quad x(0, x_0) = x_0;$$

$$2) \quad \frac{d}{dt}x(t, x_0) = f(x(t, x_0)).$$

Для линейной системы

$$\dot{x} = Ax \quad (2.3)$$

решением является функция

$$x(t) = e^{At}x_0. \quad (2.4)$$

Действительно, $e^{A0}x_0 = x_0$ и $\frac{d}{dt}e^{At}x_0 = Ae^{At}x_0 = Ax(t)$.

Пример 2.1. Рассмотрим нелинейную систему

$$\dot{x} = -\frac{1}{x}, \quad (2.5)$$

определенную в открытом множестве $\mathcal{X} = (0, \infty)$. Нетрудно показать, что решениями уравнения (2.5) являются функции

$$x(t) = \text{sign}x_0 \sqrt{x_0^2 - 2t}, \quad (2.6)$$

определенные на временном интервале $[0, x_0^2/2)$ (см. рис. 2.9, а). \square

Пример 2.2. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -x^2, \quad (2.7)$$

определенную на множестве $\mathcal{X} = \mathbb{R}^1$. Нетрудно показать, что решениями уравнения (2.7) являются функции

$$x(t) = \frac{x_0}{1 + x_0 t},$$

и они определены на временном интервале $[0, -1/x_0)$ при $x_0 < 0$ или на интервале $t \in [0, \infty)$ при $x_0 \geq 0$ (см. рис. 2.9, б). \square

Решение $x(t, x_0)$ характеризует переходный процесс системы и может быть представлено в аналитическом виде или графически — в виде функции времени (кривой переходного процесса $x = x(t)$) или фазовой траектории

$$\phi(x, x_0) = 0 \tag{2.8}$$

в пространстве \mathbb{R}^n (рис. 2.1). Фазовые траектории образуют фазовый портрет системы.

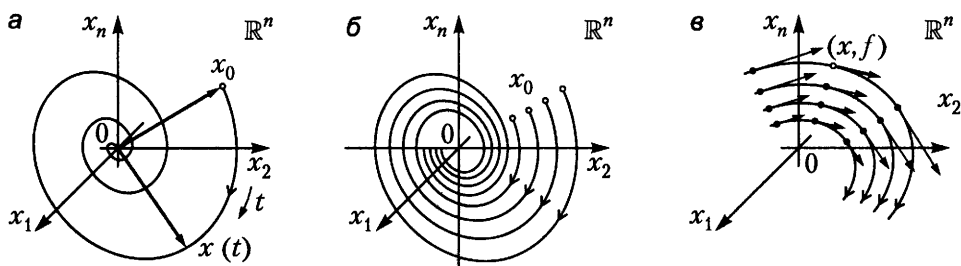


Рис. 2.1. Фазовые траектории и векторное поле

Определение 2.2. Фазовой траекторией динамической системы (2.1) из точки x_0 , или линией потока векторного поля f , называется кривая (2.8), описываемая в пространстве \mathbb{R}^n вектором $x = x(t, x_0)$, т. е. годограф x при изменении $t \in [0, T)$.

Фазовым портретом динамической системы (2.1), или потоком векторного поля f , называется множество фазовых траекторий, соответствующих различным значениям $x_0 \in \mathcal{X}$.

При условии, что функция $f(x)$ является гладкой во всех точках множества \mathcal{X} , система (2.1) относится к гладким системам (см. определение 1.16). Ее решения (кривые переходного процесса) и фазовые траектории в области \mathcal{X} также оказываются гладкими.

Определение 2.3. Стационарным решением (стационарной точкой) динамической системы (дифференциального уравнения (2.1)) называется точка $x = x^* \in \mathcal{X}$, для которой при всех $t \geq 0$ выполняется

$$x(t, x^*) = x^*.$$

Как следует из определения, необходимым и достаточным признаком стационарности точки x^* служит отсутствие движения системы, т. е.

$$\dot{x}(t, x^*) \equiv 0.$$

Следовательно, критерием стационарности является условие

$$f(x^*) = 0. \quad (2.9)$$

Отметим также, что в общем случае динамическая система может иметь неединственное стационарное решение. Так, для линейной системы (2.3) при условии $\det A \neq 0$ из равенства $Ax = 0$ находим единственную стационарную точку $x = 0$. Если же $\det A = 0$, т. е. матрица вырождена, равенству $Ax = 0$ соответствует множество стационарных точек (центральная гиперплоскость).

Пример 2.3. Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = ax.$$

Из условия $ax^* = 0$ находим, что при $a \neq 0$ стационарной будет точка $x = 0$, а при $a = 0$ любая точка x является стационарной. \square

Пример 2.4. Рассмотрим нелинейную систему

$$\dot{x} = -\sin x. \quad (2.10)$$

Из условия $\sin x^* = 0$ находим множество изолированных стационарных точек $x^* = k\pi$, где k — произвольное целое число (рис. 2.2). \square

Замечание 2.1. Понятие стационарной точки дифференциального уравнения в точности соответствует определению положения равновесия динамической системы (см. 3.1.1). \square

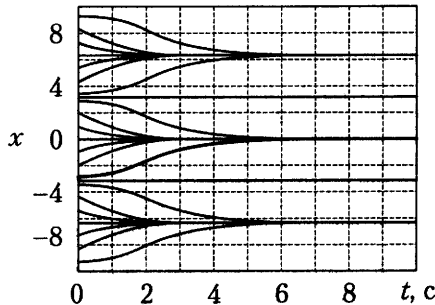


Рис. 2.2. Переходные процессы системы (2.10)

2.1.2. Построение фазовых траекторий: метод припасовывания и метод изоклин

Теоретически для построения фазовых траекторий нужно:

1) найти решения (2.2) системы (2.1) в виде n функций

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(t, x_0), \\ x_2(t) &= x_2(t, x_0), \\ &\dots \\ x_n(t) &= x_n(t, x_0); \end{aligned}$$

2) исключить время t и получить $n - 1$ уравнение

$$\begin{aligned} \phi_1(x, x_0) &= 0, \\ \phi_2(x, x_0) &= 0, \\ &\dots \\ \phi_{n-1}(x, x_0) &= 0, \end{aligned} \tag{2.11}$$

которые и составляют описание фазовой траектории (2.8).

Пример 2.5. Простейшая система

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \tag{2.12}$$

при $u = \text{const}$ имеет решение:

$$x_2(t) = x_{20} + ut, \quad x_1(t) = x_{10} + x_{20}t + \frac{u}{2}t^2.$$

Из первого выражения при $u \neq 0$ находим

$$t = \frac{x_2 - x_{20}}{u}$$

и, подставляя во второе, получаем искомое уравнение фазовой траектории

$$x_1 = x_{10} + \frac{x_{20}}{u}(x_2 - x_{20}) + \frac{1}{2u}(x_2 - x_{20})^2. \tag{2.13}$$

На рис. 2.3 представлены фазовые траектории системы (2.12) для значений $u = +1, -1$. □

Метод припасовывания. В общем случае как задача 1 нахождения в аналитической форме решений $x_i(t) = x_i(t, x_0, \dots)$, так и задача 2 исключения времени представляют значительные трудности. Ситуация несколько упрощается для линейных

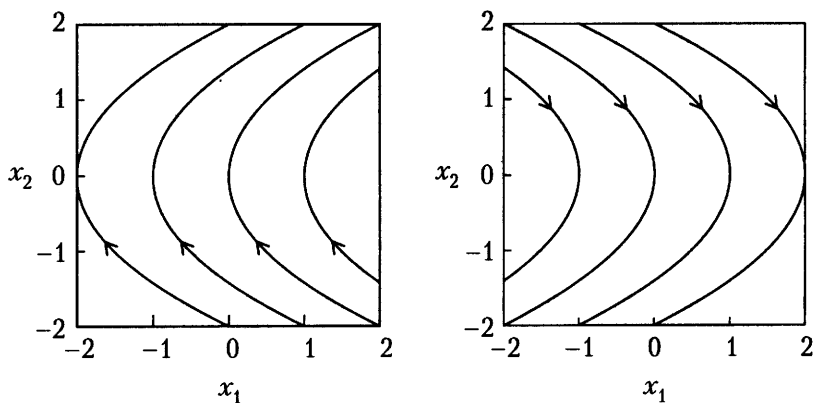


Рис. 2.3 Фазовые траектории системы (2.12)

систем, решения которых всегда известны, и ряда нелинейных систем с кусочно-постоянными параметрами, к которым относятся многие системы с негладкими нелинейными звеньями (см. 1.2.2). Для таких систем при построении фазовых траекторий может быть использован *метод припасовывания* [4, 37], который предусматривает замену первоначальной нелинейной системы более простой моделью с переменной структурой — линейной моделью с переключающимися параметрами.

В соответствии с указанным методом процедура построения фазовых траекторий включает следующие этапы:

- а) представление нелинейной системы в виде набора линейных моделей, соответствующих линейным участкам нелинейных звеньев;
- б) разбиение пространства (плоскости) на области, в которых система описывается линейными уравнениями;
- в) последовательное получение участков фазовых траекторий указанного набора линейных систем и их объединение в единую траекторию нелинейной системы («припасовывание»).

Метод иллюстрируется следующим примером.

Пример 2.6. Рассмотрим релейную систему, представленную линейной моделью (2.12) с обратной связью (регулятором):

$$u = \text{sign } v, \quad (2.14)$$

$$v = -a_1 x_1 - a_2 x_2. \quad (2.15)$$

Так как функция sign принимает два постоянных значения 1 и -1 , то на интервалах знакопостоянства система линейна (см. пример 2.5). Фазовые траектории такой линейной модели получены в форме (2.13) и представлены на рис. 2.3. Для рассматриваемой релейной системы значение u и, следовательно, выбор того или

иного участка фазовой траектории определяется знаком сигнала $v(t)$. Выделим полуплоскости (области знакопостоянства)

$$R^+ : v = -a_1x_1 - a_2x_2 > 0,$$

$$R^- : v = -a_1x_1 - a_2x_2 < 0$$

и запишем:

$$u = 1 \quad \text{при } x \in R^+, \quad u = -1 \quad \text{при } x \in R^-. \quad (2.16)$$

Таким образом, знак u , а следовательно, и тип участка фазовой траектории, зависят от области фазовой плоскости \mathbb{R}^2 , которой принадлежит текущее состояние системы. Изменение знака (и типа траектории) происходит при условии $v = 0$, т. е. на прямой

$$S : a_1x_1 + a_2x_2 = 0,$$

которая называется *линией переключения* (см. п. 6.1–6.2).

Фазовую траекторию системы из любой начальной точки x_0 можно построить как непрерывную кривую, состоящую из отрезков типовых фазовых траекторий, полученных в примере 2.5 (см. рис. 2.3). Траектории приведены на рис. 2.4, а. \square

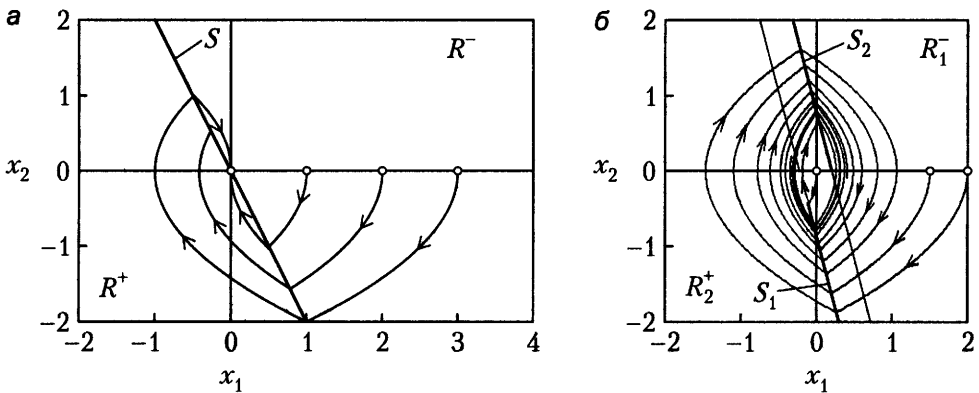


Рис. 2.4. Фазовые траектории релейных систем

Пример 2.7. Рассмотрим релейную систему с гистерезисом, представленную линейной моделью (2.12) с обратной связью

$$u = \text{hys } \frac{v}{\delta}, \quad (2.17)$$

где функция v определяется выражением (2.15). Функция hys принимает два постоянных значения 1 и -1 (см. 1.2.2 и рис. 1.9, з), и следовательно, фазовые траектории рассматриваемой релейной системы могут быть составлены из участков траекторий линейной модели (2.12) (см. рис. 2.3). Выбор того или иного участка

определяется знаком сигнала $v(t)$ и, следовательно, областью, которой принадлежит текущее состояние системы.

Для нахождения линий переключения и областей знакопостоянства запишем уравнение нелинейного динамического блока hys в виде:

$$u = \text{sign}(v - \delta) \quad \text{при } \dot{v} \geq 0, \quad (2.18)$$

$$u = \text{sign}(v + \delta) \quad \text{при } \dot{v} < 0. \quad (2.19)$$

Найдем две линии переключения (рис. 2.4, б)

$$S_1: -a_1x_1 - a_2x_2 - \delta = 0, \quad \text{при } \dot{v} \geq 0,$$

$$S_2: -a_1x_1 - a_2x_2 + \delta = 0, \quad \text{при } \dot{v} < 0,$$

каждая из которых делит плоскость \mathbb{R}^2 на две полуплоскости (области знакопостоянства управления). Для прямой S_1 — это области

$$R_1^+: u = 1, \quad R_1^-: u = -1,$$

а для прямой S_2 — области

$$R_2^+: u = 1, \quad R_2^-: u = -1.$$

Фазовая траектория системы из любой начальной точки x_0 строится как непрерывная кривая, состоящая из отрезков типовых фазовых траекторий (см. рис. 2.3), «переключающихся» на линиях S_1 и S_2 . Выбор той или иной линии переключения определяется знаком сигнала

$$\dot{v} = -a_1\dot{x}_1 - a_2\dot{x}_2 = -a_1x_2 - a_2u.$$

Фазовый портрет релейной системы с гистерезисом приведен на рис. 2.4, б. \square

Свойства траекторий (частный случай). Ввиду сложности построения фазовых траекторий нелинейных систем полезно установить их общие свойства. Рассмотрим систему второго порядка

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (2.20)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2). \quad (2.21)$$

Для систем данного вида иногда удается упростить процедуру построения фазовой траектории. Для упрощения представим уравнения (2.20)–(2.21) в виде

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2)$$

и найдем, что при $x_2 \neq 0$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{x_2}. \quad (2.22)$$

Решение полученного уравнения

$$x_2 = \phi_2(x_1, x_{10}, x_{20})$$

в явном виде описывает искомую фазовую траекторию.

Принимая во внимание, что для системы (2.20)–(2.21) $\dot{x}_1 = x_2$, можно заключить, что в верхней полуплоскости плоскости \mathbb{R}^2 , где $x_2 > 0$, переменная x_1 возрастает, а в нижней полуплоскости — убывает, т. е. фазовые траектории данной системы направлены по часовой стрелке (рис. 2.5, а).

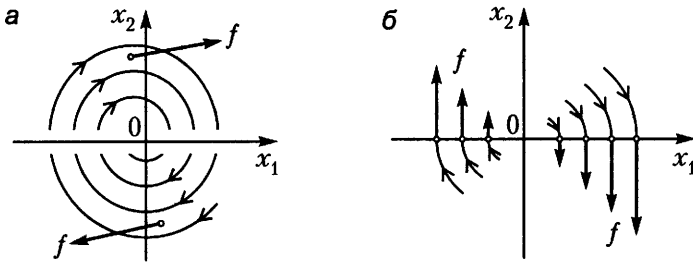


Рис. 2.5. Свойства фазовых траекторий

При $x_2 = 0$ и $f_2 \neq 0$ из уравнений (2.20)–(2.21) получаем

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_2}{f_2(x_1, x_2)} = 0. \tag{2.23}$$

Следовательно, угол наклона фазовых траекторий на оси x_1 равен $\pi/2$ (см. рис. 2.5, б).

Стационарные точки x^* системы (2.20)–(2.21) определяются из уравнений

$$x_2 = 0, \quad f_2(x_1, 0) = 0, \tag{2.24}$$

т. е. всегда расположены на оси x_1 . При этом в зависимости от функции f_2 система может иметь единственную стационарную точку, множество изолированных точек, а также кривую или отрезок кривой, соответствующие стационарным решениям (см. 2.2.4 и пример 2.27).

Векторное поле системы и метод изоклин. В произвольной точке $x \in \mathcal{X}$ вектор скорости $\dot{x} = f(x)$ системы (2.1) направлен по касательной к фазовой траектории, т. е. *векторное поле динамической системы является касательным к своему потоку*. Это важное свойство позволяет осуществить приближенное построение фазовых траекторий для систем 2-го и 3-го порядка по следующей схеме:

- а) в каждой точке x пространства состояний найти значения вектора $f(x)$;
- б) провести фазовую траекторию из начальной точки x_0 как кривую, для которой векторы $f(x)$ во всех точках пространства направлены по касательным (рис. 2.6).

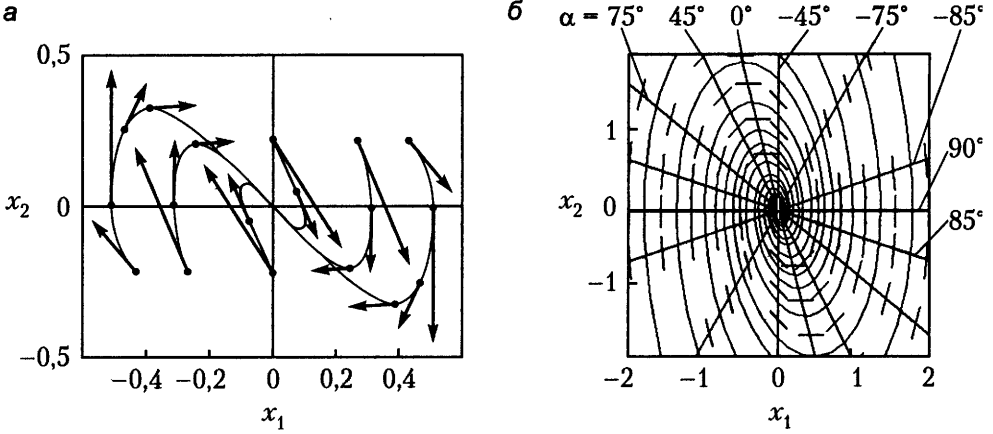


Рис. 2.6. Векторное поле (а) и изоклины (б)

Пример 2.8. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\sin(a_1x_1 + a_2x_2), \tag{2.25}$$

где a_1, a_2 — положительные коэффициенты. В произвольной точке (x_1, x_2) плоскости \mathbb{R}^2 вектор f имеет значение

$$f = \begin{vmatrix} x_2 \\ -\sin(a_1x_1 + a_2x_2) \end{vmatrix}.$$

Векторное поле и фазовые траектории системы представлены на рис. 2.6, а (см. также пример 2.26 и рис. 2.12, б). □

Указанная процедура аналогична известному методу изоклин [4, 37]. Рассмотрим систему второго порядка (2.20)–(2.21), для которой при $x_2 \neq 0$ фазовые траектории удовлетворяют дифференциальному уравнению (2.22), а при $x_2 = 0$ — уравнению (2.24). Напомним, что

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол наклона касательной к фазовой траектории, или наклона векторного поля системы. Следовательно, на некоторой кривой, описываемой уравнением

$$\frac{f_2(x_1, x_2)}{x_2} = C, \tag{2.26}$$

где $C = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{const}$, касательные к фазовым траекториям имеют одинаковый наклон α (при $x_2 = 0$ фазовые траектории имеют наклон $\pi/2$).

Определение 2.4. Кривые (2.26) равного наклона касательных к фазовым траекториям (или равного наклона векторного поля) системы называются *изоклинами*.

В соответствии с методом изоклин построение фазовых траекторий для систем 2-го порядка осуществляется по следующей схеме:

- 1) на плоскости \mathbb{R}^2 проводятся изоклины для различных значений параметра C ;
- 2) на каждой изоклине строятся отрезки прямых с соответствующим наклоном $\alpha = \text{Arctg } C$;
- 3) фазовая траектория из начальной точки x_0 проводится так, чтобы на изоклинах указанные отрезки были ее касательными.

Пример 2.9. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a_1x_1 - a_2x_2. \tag{2.27}$$

Уравнение изоклины с наклоном касательных $\alpha = \text{Arctg } C \neq \pi/2$ имеет вид

$$a_1x_1 + (C + a_2)x_2 = 0,$$

а уравнение изоклины для $\alpha = \pi/2$ —

$$x_2 = 0.$$

Изоклины, касательные и фазовые траектории системы представлены на рис. 2.6, б. □

2.1.3. Инвариантные множества и аттракторы

Инвариантные множества. В соответствии с определением в стационарных точках (или множествах) система неподвижна ($\dot{x} = 0$) и, следовательно, ее фазовая траектория, начинающаяся из стационарной точки x^* , целиком принадлежит x^* , что является признаком *инвариантности* (т. е. неизменности). Более общий случай инвариантного множества определяется следующим образом.

Определение 2.5. Множество $\mathcal{X}^* \subset \mathcal{X}$ называется *инвариантным множеством системы* (2.1), когда для любых начальных значений $x_0 \in \mathcal{X}^*$ и всех $t \geq 0$ выполняется

$$x(t, x_0) \in \mathcal{X}^*.$$

Как следует из определения, все траектории, начинающиеся в инвариантном множестве, целиком принадлежат этому множеству. Тривиальным частным случаем инвариантного множества являются стационарные точки, а также образуемые ими множества. Большой интерес представляет рассмотрение открытых инвариантных множеств \mathcal{X}^* (областей объемлющего пространства \mathbb{R}^n) и инвариантных поверхностей \mathcal{S}^* (см. 2.1.4) — геометрических объектов размерности меньше n . При этом

пространство \mathbb{R}^n может рассматриваться как тривиальный частный случай открытого множества, а точка x^* — как частный случай поверхности размерности 0. К открытым инвариантным множествам относятся области притяжения (см. ниже и 3.1.1).

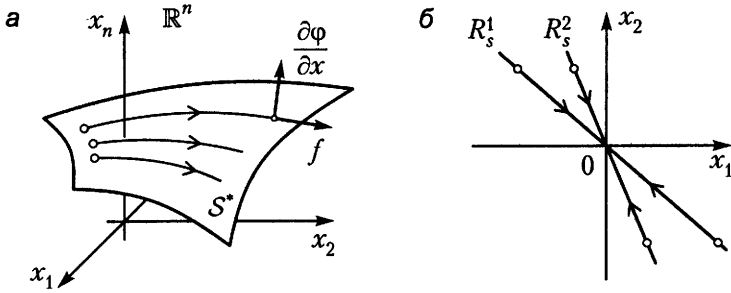


Рис. 2.7. Инвариантная поверхность и собственные подпространства

Важным частным случаем инвариантного множества является инвариантная гиперповерхность (подмногообразие, см. 1.1.4). Рассмотрим регулярную ν -мерную гиперповерхность $S^* \subset \mathcal{X}$ (рис. 2.7, а), описываемую векторным уравнением

$$\varphi(x) = 0, \tag{2.28}$$

где $\varphi(x) = \{\varphi_i(x)\}$ ($i = 1, n - \nu$) — гладкая вектор-функция. Для инвариантной поверхности при условии $x_0 \in S^*$ для всех $t \geq 0$ имеет место

$$x(t, x^*) \in S^*.$$

Так как по определению выражение (2.28) выполняется тождественно для всех t , то можно записать

$$\dot{\varphi}(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \dot{x} = 0.$$

Отсюда после подстановки (2.1) получаем *необходимое и достаточное условие инвариантности* гладкой гиперповерхности S^* :

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} f(x) \right|_{x \in S^*} = 0. \tag{2.29}$$

Напомним, что выражение $\partial \varphi_i / \partial x$ описывает градиент функции φ_i , т. е. вектор, направленный ортогонально по отношению к поверхности $\varphi_i(x) = 0$ (см. рис. 2.7, а), и следовательно, выражение (2.29) показывает, что на инвариантной гиперповерхности S^* векторное поле f ортогонально градиентам или касательно к самой поверхности.

Рассмотрим линейную систему (2.3) и ν -мерную плоскость (линейное подпространство), заданную в неявном виде (1.11) или в параметрической форме (1.12). Условие инвариантности (2.29) принимает вид $\Phi_0 A x|_{x \in S^*} = 0$, или, в силу (1.12), —

$$\Phi_0 A R_s = 0.$$

К инвариантным гиперповерхностям линейных систем относятся собственные подпространства (центральные гиперплоскости) и, в частности, одномерные собственные подпространства (прямые). Пусть $\lambda^* \neq 0$ — вещественное собственное число матрицы A , и по определению $\det(\lambda^* I - A) = 0$. Рассмотрим геометрический объект пространства \mathbb{R}^n

$$(\lambda^* I - A)x = 0. \quad (2.30)$$

Так как матрица $\lambda^* I - A$ вырождена, выражение (2.30) содержит только $n - 1$ линейно независимое уравнение. Последние и определяют неявную форму искомого собственного подпространства (прямой).

Пример 2.10. Рассмотрим линейную систему второго порядка (2.27) с ненулевыми коэффициентами a_1, a_2 . Здесь $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{vmatrix}$, и выражение (2.30) принимает вид

$$\begin{vmatrix} \lambda^* & -1 \\ a_1 & \lambda^* + a_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

После элементарных преобразований получим

$$\lambda^* x_1 - x_2 = 0, \quad (\lambda^{*2} + a_2 \lambda^* + a_1) x_1 = 0.$$

Так как λ^* — собственное число системы, второе выражение является тождеством, а первое выражение дает искомое неявное уравнение прямой (одномерного собственного подпространства):

$$R_s: \begin{vmatrix} \lambda^* & -1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Для случая неравных вещественных чисел $\lambda_1^* \neq \lambda_2^*$ найдем два собственных подпространства R_s^1 и R_s^2 (см. рис. 2.7, б). \square

Притягивающие множества — аттракторы. Наибольший интерес представляют инвариантные множества, обладающие свойством аттрактивности, т. е. притягивающие к себе фазовые траектории системы (рис. 2.8). К таким геометрическим объектам относятся многие стационарные точки (или образуемые ими множества), собственные подпространства линейных систем (центральные прямые, плоскости, гиперплоскости), орбиты (замкнутые траектории) колебательных систем и другие виды инвариантных гиперповерхностей.

Определение 2.6. Гладкая инвариантная гиперповерхность \mathcal{S}^* называется *аттрактором (притягивающим множеством)* системы (2.1), если для $x_0 \in \mathcal{E}(\mathcal{S}^*)$ выполняется условие аттрактивности

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t), \mathcal{S}^*) = 0. \quad (2.31)$$

Множество $\mathcal{E}(\mathcal{S}^*)$ называется *областью притяжения* аттрактора \mathcal{S}^* .

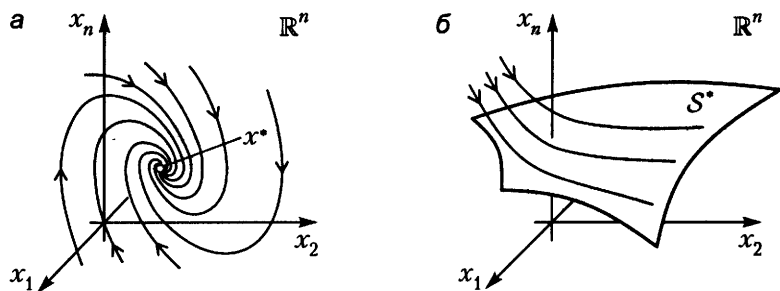


Рис. 2.8. Точечный аттрактор (а) и притягивающая поверхность (б)

В частном случае, когда инвариантным множеством является стационарная точка x^* , ее окрестность определяется как открытое множество $\mathcal{E}(x^*)$, а расстояние — $|x - x^*|$. Условие аттрактивности (2.31) принимает вид

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x^*| = 0, \quad (2.32)$$

и стационарная точка x^* называется точечным аттрактором (рис. 2.8, а).

Отметим, что понятие аттрактора связано с вопросами устойчивости динамических систем (см. 3.1.1), причем области притяжения часто являются открытыми инвариантными множествами системы.

2.2. Особенности нелинейной динамики

Рассмотрим свойства решений нелинейных систем вида (2.1) и некоторые особенности, отличающие их поведение от линейных систем (2.3). К важнейшим вопросам, затрагивающим фундаментальные свойства нелинейных динамических систем (дифференциальных уравнений), относятся проблемы существования, единственности и продолжимости их решений. В технике управления принято полагать, что по «физическим соображениям» для любых начальных условий x_0 найдется интегральная кривая (2.2), она единственна и определена на полубесконечном интервале времени $[0, \infty)$ (бесконечно продолжима). Это действительно так, если система является линейной или правая часть уравнения (2.1) представлена достаточно гладкой и ограниченной функцией (см. теорему 2.3). Тем не менее возможны случаи, когда для некоторых начальных условий нелинейная система не имеет решений, или ее решения определены на ограниченном интервале времени, а также случаи получения нескольких решений, соответствующих одному начальному состоянию.

2.2.1. Существование решений

Следующий пример иллюстрирует случай отсутствия регулярных решений простой нелинейной модели.

Пример 2.11. Рассмотрим систему (2.5) (см. пример 2.1), где $x \in \mathcal{X} = \mathbb{R}^1$. Так как функция $f(x) = -1/x$ имеет разрыв в точке $x = 0$, система не имеет решений с начальным значением $x_0 = 0$ (рис. 2.9, а). \square

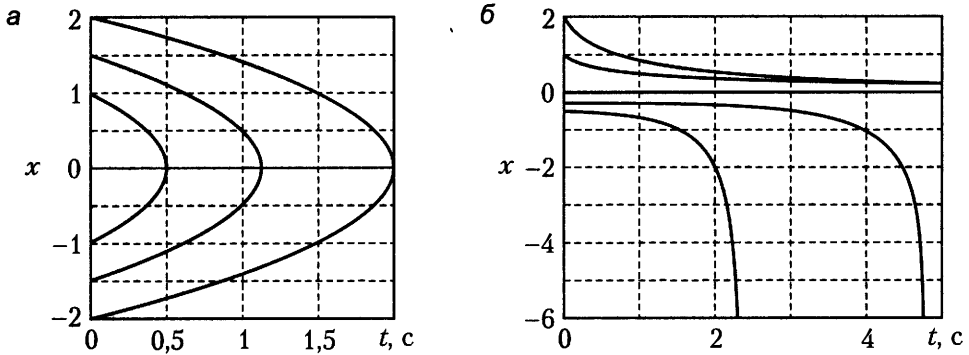


Рис. 2.9. Переходные процессы: а — системы (2.5), б — системы (2.7)

Точки и множества, в которых система не имеет решений, называются *сингулярными*. Достаточные условия существования решений нелинейного дифференциального уравнения и отсутствия сингулярных точек даются известной *теоремой Пеано*.

Теорема 2.1. Если функция $f(x)$ непрерывна в открытой области \mathcal{X} , то для любых начальных условий $x_0 \in \mathcal{X}$ существует решение $x(t) = x(t, x_0)$, определенное на некотором интервале $t \in [0, T)$, $T > 0$.

Пример 2.12. Рассмотрим систему (2.5), определенную в открытом множестве $\mathcal{X} = (0, \infty)$. Функция $f(x) = -1/x$ непрерывна на рассматриваемом множестве, и в соответствии с теоремой 2.1 для любых $x_0 \in \mathcal{X}$ решения существуют. Действительно, как показано в примере 2.1, искомые решения находятся в виде (2.6) и определены на конечном временном интервале $[0, T)$, где $T = x_0^2/2$ (см. рис. 2.9, а). \square

Пример 2.13. Рассмотрим систему (2.7) (см. также пример 2.2). Здесь функция x^2 непрерывна. Следовательно, искомые решения существуют. Как показано в примере 2.2, решения определены на временном интервале $[0, -1/x_0)$ при $x_0 < 0$ или на интервале $t \in [0, \infty)$ при $x_0 \geq 0$. Графики переходных процессов показаны на рис. 2.9, б. \square

Отметим, что теорема 2.1 предлагает лишь *достаточные* условия существования, которые в ряде случаев оказываются излишне жесткими. С другой стороны, выполнение ее условий еще не гарантирует единственности решений (2.2). Для иллюстрации приведем следующие примеры.

Пример 2.14. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -\operatorname{sign} x, \quad (2.33)$$

полагая $\operatorname{sign} 0 = 0$. Система не удовлетворяет условию непрерывности теоремы 2.1, однако для любых начальных значений x_0 решение существует и определяется выражениями

$$x(t) = x_0 - (\operatorname{sign} x_0) t \quad \text{при } t \in [0, |x_0|), \quad (2.34)$$

$$x(t) = 0 \quad \text{при } t \geq |x_0|. \quad (2.35)$$

□

Пример 2.15. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = \sqrt[3]{x}, \quad (2.36)$$

где $x \in \mathcal{X} = \mathbb{R}^1$. Так как функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ непрерывна, то по теореме 2.1 решение системы существует. Более того, для начального значения $x_0 = 0$ можно отыскать три решения (рис. 2.10):

$$x(t) \equiv 0, \quad x(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}, \quad x(t) = -\left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}$$

□

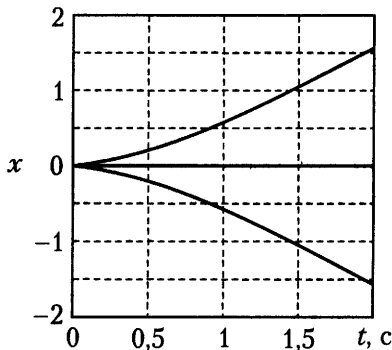


Рис. 2.10. Неединственность решений системы (2.36)

2.2.2. Единственность решений

Как показывает анализ примера 2.15 (см. пример 2.16), причиной существования нескольких решений дифференциального уравнения может служить разрыв производной $\partial f/\partial x$, и поэтому условие единственности решений обычно формулируется как требование «достаточной» гладкости функции $f(x)$, например, в форме *условия Липшица* (см. 1.1.2) [17, 26].

Теорема 2.2. Если функция $f(x)$ локально липшицева во всех точках области \mathcal{X} (см. определение 1.9), т. е. для любых x^* из достаточно малой δ -окрестности точки $x \in \mathcal{X}$ найдется постоянная Липшица $L = L(\delta)$:

$$|f(x) - f(x^*)| \leq L |x - x^*|, \quad (2.37)$$

то для любых начальных условий $x_0 \in \mathcal{X}$ система (2.1) имеет единственное (непродолжаемое) решение (2.2).

Пример 2.16. Нетрудно показать, что функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$, имеющая бесконечно большое значение производной в точке $x = 0$, не является (локально) липшицевой на множестве $\mathcal{X} = (-\infty, \infty)$, но является локально липшицевой при $\mathcal{X} = (0, \infty)$. Следовательно, по теореме 2.2 система (2.36) имеет единственное решение для любых $x_0 > 0$. \square

Пример 2.17. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = |x|, \quad (2.38)$$

где $x \in \mathcal{X} = \mathbb{R}^1$. Здесь производная $\partial|x|/\partial x$ не определена в точке $x = 0$, и поэтому функция $f(x) = |x|$ не является гладкой в \mathbb{R}^1 . Тем не менее, функция $|x|$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица (2.37) с константой $L = 1$. Поэтому для любых $x_0 \in \mathbb{R}^1$ система имеет одно решение. \square

Как и при рассмотрении вопроса существования решений, отметим, что приведенная теорема дает лишь *достаточные* условия, которые в некоторых случаях могут оказаться излишне жесткими.

Пример 2.18. Система (2.33) для любых областей \mathcal{X} , включающих точку $x = 0$, не удовлетворяет условию Липшица. Однако ее решения оказываются единственными. \square

Замечание 2.2. Нетрудно показать, что условиям теорем 2.1 и 2.2 удовлетворяют системы, в которых функция f имеет непрерывные частные производные по x , а также все гладкие нелинейные системы (см. определение 1.16). Так, в системе (2.7) функция $f(x) = -x^2$ гладкая, и, следовательно, для любых начальных условий существует единственное решение. \square

2.2.3. Продолжимость решений и полнота системы

Как показывают определение 2.1 и приведенные выше примеры, существование решения дифференциального уравнения устанавливается в общем случае на ограниченном временном интервале. Рассматриваемые в следующей главе вопросы устойчивости связаны с поведением системы на полубесконечном интервале, что вызывает необходимость дальнейшего сужения класса систем и допустимых функций $f(x)$.

Определение 2.7. Система (2.1) (векторное поле $f(x)$) называется *полной на множестве* \mathcal{X} , если для всех $x_0 \in \mathcal{X}$ ее решения (2.2) определены на полубесконечном интервале $t \in [0, \infty)$ и $x(t) = x(t, x_0) \in \mathcal{X}$.

Определение полной системы предусматривает, что все ее интегральные кривые при любых сколь угодно больших t не покидают множества \mathcal{X} , т. е. поток системы принадлежит множеству \mathcal{X} . Если система определена во всем пространстве, т. е. $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, то свойство полноты означает отсутствие траекторий, стремящихся к бесконечности в конечные моменты времени.

Пример 2.19. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -x - x^2, \quad (2.39)$$

где $x \in \mathcal{X} = (-1, \infty)$. Как показывает рис. 2.11, а, все траектории системы, начинающиеся из области \mathcal{X} , принадлежат этой области, и следовательно, система является полной в \mathcal{X} .

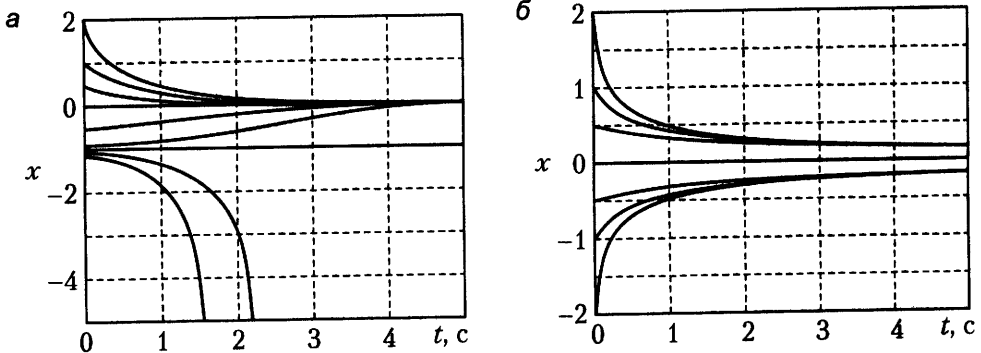


Рис. 2.11. Переходные процессы: (а) системы (2.39), (б) системы (2.40)

С другой стороны, если система (2.39) задана во всем пространстве $\mathbb{R}^1 = (-\infty, +\infty)$, то ее решения, соответствующие начальным значениям $x_0 < -1$, определены только на ограниченном временном интервале $[0, T)$ (см. рис. 2.11, а). Следовательно, в \mathbb{R}^1 система не является полной. \square

Пример 2.20. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -x^3, \quad (2.40)$$

определенную в пространстве \mathbb{R}^1 . Система является полной в \mathbb{R}^1 , так как все ее решения

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 t + 1}} \quad (2.41)$$

определены для любых $t \geq 0$ (рис. 2.11, б). □

Простые достаточные условия существования решений и полноты системы в пространстве \mathbb{R}^n устанавливаются следующей теоремой (см., например, [12]).

Теорема 2.3. Пусть $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$. Если функция $f(x)$ в \mathbb{R}^n непрерывна, локально липшицева и ограничена, т. е. для всех $t > 0$ найдется число M такое, что

$$|f(x)| \leq M, \quad (2.42)$$

то для любых начальных условий $x_0 \in \mathcal{X}$ система (2.1) имеет единственное решение (2.2), определенное на интервале $t \in [0, \infty)$, и следовательно, является полной в \mathbb{R}^n .

Как показывает анализ линейных систем (всегда являющихся полными в \mathbb{R}^n), а также следующий пример нелинейной системы, требование ограниченности правой части уравнения (2.1) часто оказывается избыточным.

Пример 2.21. Функция $|x|$ не является ограниченной. Тем не менее решения системы (2.38)

$$x(t) = e^{(\text{sign } x_0)t} x_0, \quad (2.43)$$

где $\text{sign } 0 = 0$, определены для любых x_0 и $t \geq 0$. Следовательно, система — полная в \mathbb{R}^1 . Отметим, что функция $|x|$ является непрерывной и глобально липшицевой, что (в соответствии с приведенной далее теоремой 2.4) позволяет сделать вывод о полноте рассматриваемой системы. □

Менее жесткие условия полноты динамических систем предусмотрены в следующем утверждении [48].

Теорема 2.4. Пусть $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$. Если функция $f(x)$ непрерывна и глобально липшицева в \mathbb{R}^n , т. е. в выражении (2.37) постоянная Липшица не зависит от x и x^* (см. определение 1.8), то для любых начальных условий $x_0 \in \mathbb{R}^n$ система (2.1) имеет единственное решение (2.2) и является полной в \mathbb{R}^n .

Для гладких систем (2.1) глобальное условие Липшица можно заменить неравенством (2.37), проверяемым в произвольной точке $x \in \mathbb{R}^n$, например, в точке $x = 0$:

$$|f(0) - f(x^*)| \leq L|x^*|. \quad (2.44)$$

В то же время для целого ряда систем решения на полубесконечном интервале времени имеют место несмотря на нарушение условия Липшица или даже условия непрерывности функции $f(x)$.

Пример 2.22. Функция $f(x) = -x^3$ гладкой системы (2.40) (см. пример 2.20) не удовлетворяет глобальному условию Липшица. Тем не менее система является полной в \mathbb{R}^1 , что устанавливается непосредственной проверкой – все ее решения (2.41) определены для любых $t \geq 0$ (см. также рис. 2.11, б). \square

Пример 2.23. Функция $\text{sign } x$ разрывна и не удовлетворяет условию Липшица. Однако решения системы (2.33) при $t \geq 0$ определяются выражениями (2.34)–(2.35), что показывает, что система является полной в \mathbb{R}^1 . \square

Свойство полноты системы в некоторой области или во всем пространстве состояний является безусловным требованием при рассмотрении вопросов устойчивости (см. п. 3.1). Оно связано также с понятиями инвариантности.

2.2.4. Стационарные решения

Линейная система (2.3) в зависимости от матрицы A может иметь единственную стационарную точку $x = 0$ или множество стационарных точек (плоскость, прямую), описываемое уравнением $Ax = 0$.

Пример 2.24. Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a_2 x_2. \quad (2.45)$$

Следуя правилу (2.9), находим линейно зависимые решения

$$x_2^* = 0, \quad a_2 x_2^* = 0,$$

т. е. стационарными являются все точки, лежащие на прямой $x_2 = 0$ (оси x_1). \square

К изолированным стационарным точкам *линейных* систем относятся *узлы, седла, фокусы и центры* (см. [4, 24, 37]).

Нелинейная система (2.1) кроме тривиального случая, когда стационарным решением является единственная точка, удовлетворяющая условию (2.9), может также иметь множество стационарных точек различного типа. Это множество может быть представлено набором изолированных положений равновесия (см. пример 2.4), гиперповерхностью, кривой или их участками. Поведение нелинейной системы в окрестности изолированной стационарной точки оказывается существенно сложнее поведения линейной системы, что обуславливает появление комбинированных типов стационарных точек [2, 11].

Пример 2.25. Рассмотрим нелинейную систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 - 25(x_1 - 1.4x_1^3 + 0.27x_1^5). \quad (2.46)$$

По правилу (2.9) находим, что стационарными являются точки, удовлетворяющие условиям

$$x_2 = 0, \quad x_1 - 1.4x_1^3 + 0.27x_1^5 = 0.$$

Фазовые траектории системы приведены на рис. 2.12, а и показывают наличие 5-ти стационарных точек типа *устойчивый фокус* и *седло*. \square

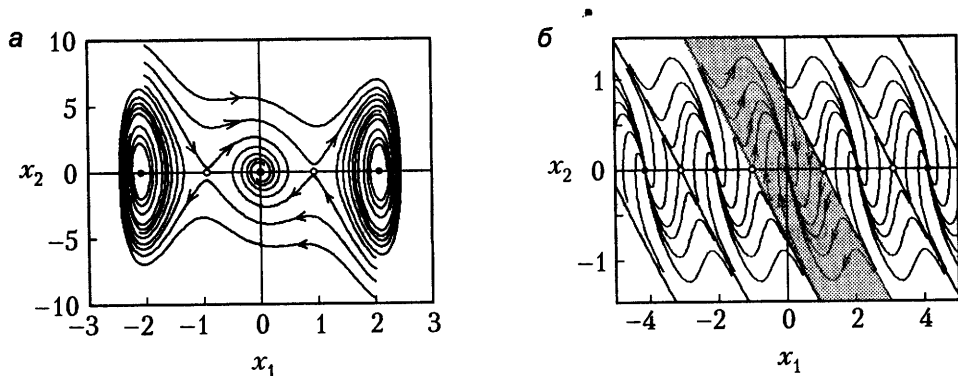


Рис. 2.12. Фазовые траектории систем (2.46) и (2.25)

Пример 2.26. Рассмотрим нелинейную систему (2.25), где $a_1 \neq 0$. По правилу (2.9) находим

$$x_2^* = 0, \quad \sin(a_1 x_1^* + a_2 x_2^*) = 0,$$

и следовательно, стационарными являются все точки с координатами $x_2^* = 0, x_1^* = k\pi/a_1$, где k — произвольное целое число (рис. 2.12, б). \square

Пример 2.27. Рассмотрим нелинейную (негладкую) систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 - \text{dez}(a_1 x_1 + a_2 x_2), \quad (2.47)$$

где $a_1 \neq 0$. По правилу (2.9) находим

$$x_2^* = 0, \quad \text{dez}(a_1 x_1) = 0,$$

и следовательно, стационарные точки образуют отрезок прямой (рис. 2.13, а)

$$\mathcal{X}^* : x_2^* = 0, \quad x_1^* \in \left[-\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_1} \right].$$

Напомним, что стационарные точки и образуемые ими множества относятся к простейшему типу инвариантных множеств и могут обладать свойством аттрактивности (см. 2.1.3). \square

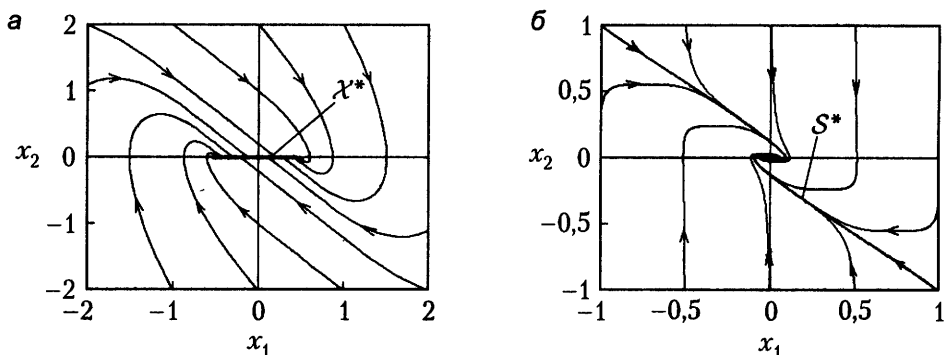


Рис. 2.13. Фазовые траектории систем (2.47) и (2.48)

2.2.5. Инвариантные множества, локальные и глобальные свойства

Рассмотрим поведение нелинейной системы на некотором множестве $\mathcal{X}^* \subset \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, полагая, что система в \mathcal{X} удовлетворяет условиям существования и единственности, а также является полной.

Инвариантные множества и аттракторы. Понятие инвариантного множества (определение 2.5) предусматривает, что траектории системы, начинающиеся в \mathcal{X}^* , целиком лежат в его пределах.

Наибольший интерес обычно представляет изучение стационарных точек x^* и инвариантных поверхностей \mathcal{S}^* , обладающих свойством аттрактивности (притяжения фазовых траекторий, см. 2.1.3), а также рассмотрение открытых инвариантных множеств (окрестностей $\mathcal{E}(x^*)$ или $\mathcal{E}(\mathcal{S}^*)$) — областей притяжения указанных аттракторов.

Для линейных систем к числу притягивающих относятся изолированные точки типа устойчивых узлов и фокусов, гиперплоскости (подпространства), состоящие из стационарных точек (см. пример 2.24), и собственные подпространства различной размерности (см. 2.1.3 и пример 2.10). При этом области притяжения точечных, а часто и многомерных линейных аттракторов неограничены и представлены всем пространством \mathbb{R}^n .

Нелинейная система (2.1), кроме тривиального случая, когда аттрактором является единственная точка (см. примеры 2.21 и 2.24), может иметь множество притягивающих стационарных точек различного типа. Это множество может быть представлено набором изолированных точек (см. пример 2.4), гиперповерхностями, кривыми, а также их участками. Инвариантные гиперповерхности нелинейных систем, не являющиеся стационарными множествами, также часто являются аттракторами.

Области притяжения (открытые окрестности некоторых притягивающих множеств) относятся к инвариантным множествам нелинейной системы.

Пример 2.28. Рассмотрим нелинейную систему (2.10) (см. пример 2.4 и рис. 2.2). Стационарные точки $x^* = 2k\pi$, где k — произвольное целое число, являются точечными аттракторами. Их области притяжения определяются выражениями $x^* \in ((2k - 1)\pi, (2k + 1)\pi)$ и являются инвариантными множествами. \square

Пример 2.29. Рассмотрим нелинейную систему (2.25) (см. пример 2.26). Стационарные точки $x_2^* = 0$, $x_1^* = 2k\pi$, где k — произвольное целое число, являются точечными аттракторами. Последние представлены на рис. 2.12, б, причем область притяжения точки $(0, 0)$ выделена. \square

Пример 2.30. Рассмотрим негладкую нелинейную систему (2.47) (см. пример 2.27). Отрезок прямой $x_2^* = 0$, $x_1^* \in [-1/a_1, 1/a_1]$, который образуют стационарные точки, является кусочным аттрактором системы, причем областью притяжения является все пространство \mathbb{R}^n (см. рис. 2.13, а). \square

Пример 2.31. Рассмотрим нелинейную систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -(a_1 x_1 + a_2 x_2)^3, \quad (2.48)$$

где a_1, a_2 — положительные коэффициенты. Система имеет единственную стационарную точку $(0, 0)$. Траектории системы показаны на рис. 2.13, б. Как видно из рисунка, аттракторами системы являются как стационарная точка, так и кривая (подмногообразие) S^* . При этом областью притяжения является все пространство \mathbb{R}^n . \square

Линейные системы могут иметь замкнутые инвариантные гиперповерхности и в частности инвариантные кривые — орбиты. Однако они не являются притягивающими множествами. Наличие замкнутых аттракторов — характерная особенность многих нелинейных систем (см. рис. 2.14, а также главу 5).

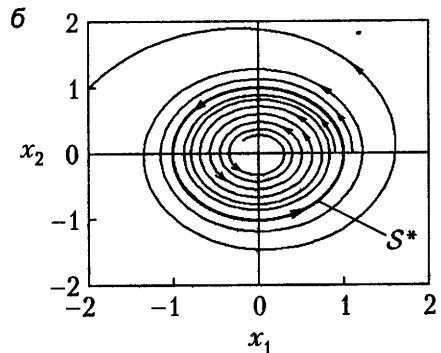
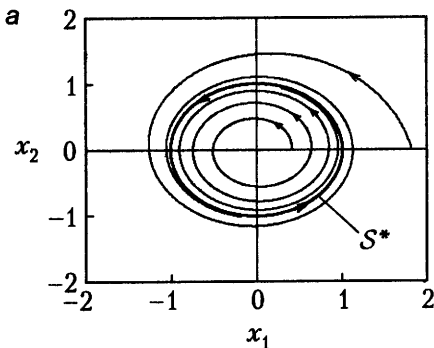


Рис. 2.14. Устойчивый (а) и неустойчивый (б) предельные циклы

Определение 2.8. Замкнутые инвариантные кривые (замкнутые гиперповерхности размерности 1, *орбиты*) называются *предельными циклами* системы.

Замкнутые орбиты, удовлетворяющие условию аттрактивности (2.31), называются *устойчивыми предельными циклами*.

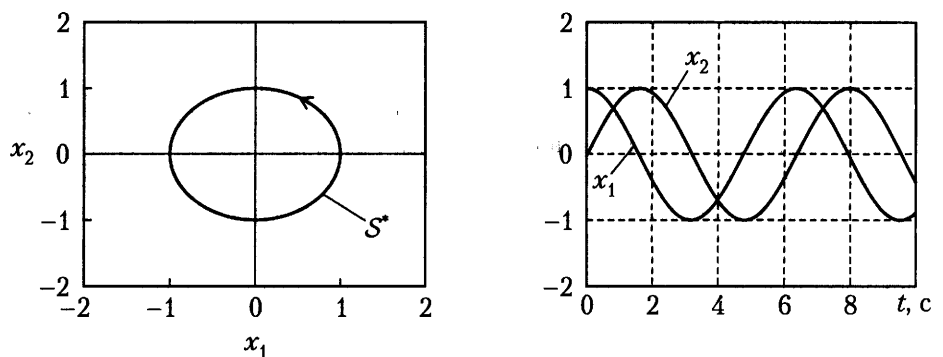


Рис. 2.15. Предельный цикл и автоколебания

Режим движения системы по орбите называется *автоколебанием*, что обусловлено незатухающими колебаниями переменных состояния (рис. 2.15). При этом устойчивые автоколебания соответствуют устойчивым предельным циклам системы (рис. 2.14, а). Понятия неустойчивого предельного цикла и неустойчивых автоколебаний связывают с отражением потока системы от рассматриваемой орбиты (рис. 2.14, б). В общем случае нелинейные системы могут иметь несколько предельных циклов [2]. Если при этом имеют место соосные орбиты движения, то среди них обычно чередуются устойчивые и неустойчивые циклы.

Локальные и глобальные свойства. Для линейных стационарных систем поведение системы в достаточно малой окрестности некоторой (например, стационарной) точки в определенном масштабе повторяет динамику движения в пространстве \mathbb{R}^n , и поэтому все ее свойства носят *глобальный* характер. Свойства нелинейной системы в различных областях пространства состояний могут существенно различаться, что определяет необходимость указания области, в которой имеет место то или иное явление, или по крайней мере предупреждения о ее возможной ограниченности.

Свойства динамической системы, которые имеют место в некотором открытом подмножестве \mathcal{X}^* пространства \mathbb{R}^n («в малом»), называются *локальными*. В качестве указанного подмножества может выступать окрестность некоторой точки $\mathcal{E}(x^*)$ или окрестность гладкой поверхности $\mathcal{E}(S^*)$. Свойства, справедливые во всем пространстве \mathbb{R}^n («в целом»), называются *глобальными*.

Замечание 2.3. Термин «в малом» обычно не связан с размером области \mathcal{X}^* , в которой данное свойство справедливо, а лишь указывает на факт *существо-*

ванья такой области. В одних случаях область оказывается достаточно малым ограниченным множеством (окрестностью некоторой точки), а в других — охватывает все пространство \mathbb{R}^n . \square

Если для линейных систем все свойства являются глобальными, то для нелинейных систем наличие глобальных свойств является скорее приятным исключением. Обычно такие свойства нелинейной системы, как единственности и существования решений, полноты, а также устойчивости и управляемости (см. 3.1.1 и 4.1.3), справедливы только локально, причем поведение нелинейной системы в малом часто напоминает поведение линейной системы. Различие свойств нелинейной системы в различных областях пространства состояний, наличие сингулярных точек, неединственность стационарных состояний и проч. обуславливают необходимость указания области \mathcal{X}^* , в которой то или иное свойство системы справедливо.

Поверхности или кривые, отделяющие области с различными свойствами нелинейной системы, называются *сепаратрисами*. Примерами сепаратрис могут служить поверхности ограничивающих области притяжения стационарных точек. К ним, в частности, относятся прямые на рис. 2.12, б и неустойчивый предельный цикл на рис. 2.14, б.

Глава 3. Устойчивость нелинейных систем

Устойчивость относится к основным свойствам динамической системы, определяющим ее общую работоспособность. В линейной теории понятия устойчивости достаточно просты — система всегда является полной, обычно содержит одно положение равновесия, областью притяжения является все пространство и т. д. Рассмотренные в п. 2.2 особенности нелинейной динамики указывают на необходимость более подробного изучения концепций устойчивости нелинейных систем, а также свойств систем, подверженных действию возмущений (устойчивости по входу). В то же время появление целого ряда новых задач управления, таких как задачи согласования и управления траекторным движением, а также изучение более сложных явлений нелинейной динамики, связанных с инвариантностью и аттрактивностью многомерных геометрических объектов (см. главу 5), определяют интерес к специальным свойствам динамических систем — частичной устойчивости движения и устойчивости по выходным переменным.

3.1. Основные понятия теории устойчивости

К наиболее распространенным концепциям классической теории устойчивости относится устойчивость по Ляпунову, асимптотическая и экспоненциальная устойчивость. Для исследования устойчивости применяются 1-й и 2-й (*прямой*) методы А. М. Ляпунова, а также целый ряд подходов, построенных на их основе.

3.1.1. Равновесные состояния и устойчивость

Будем рассматривать поведение динамической системы

$$\dot{x} = f(x), \tag{3.1}$$

определенной на открытом множестве \mathcal{X} , относительно ее равновесных состояний, которые соответствуют стационарным решениям дифференциального уравнения (3.1).

Определение 3.1. Точка $x = x^* \in \mathcal{X}$ называется *равновесным состоянием (положением равновесия)* системы (3.1), если для всех $t \geq 0$ выполняется

$$x(t, x^*) = x^*.$$

Как следует из определения, необходимым и достаточным условием равновесия системы в точке x^* является выполнение равенства

$$f(x^*, t) = 0$$

для всех $t \geq 0$.

Определим окрестность $\mathcal{E}(x^*)$ точки x^* как открытое связное подмножество области \mathcal{X} , содержащее x^* . Приведем следующие понятия, относящиеся к *локальному* поведению системы, т. е. справедливые в некоторой окрестности положения равновесия. При этом будем полагать, что всегда найдется окрестность $\mathcal{E}(x^*)$, в которой рассматриваемая динамическая система является полной (см. определение 2.7), и следовательно, ее решения

$$x = x(t, x_0) \tag{3.2}$$

определены на полубесконечном интервале времени t . Понятия иллюстрируются рис. 3.1, где $x^* = 0$.

Определение 3.2. Равновесное состояние x^* (или система (3.1) в точке x^*) называется *устойчивым по Ляпунову*, если отображение $x_0 \mapsto x(t, x_0)$, где $t \geq 0$, равномерно непрерывно в точке $x_0 = x^*$.

Равновесное состояние x^* (или система (3.1) в точке x^*) называется *неустойчивым*, если отображение $x_0 \mapsto x(t, x_0)$, где $t \geq 0$, допускает разрыв в точке $x_0 = x^*$.

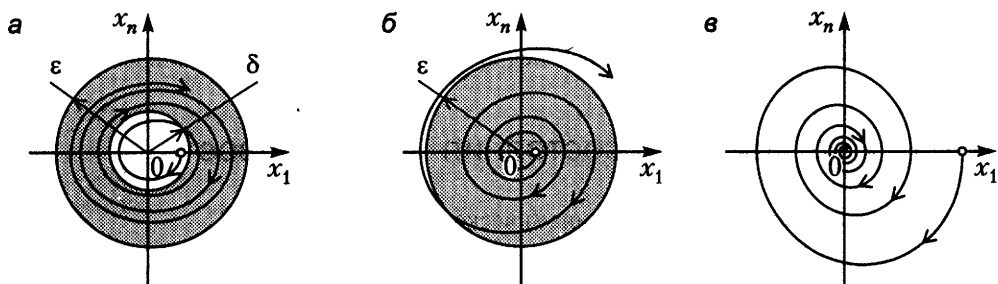


Рис. 3.1. Устойчивость по Ляпунову (а), неустойчивость (б) и асимптотическая устойчивость (в)

Существование соответствующего отображения множества начальных значений $x_0 \in \mathcal{X}$ в множество непрерывных функций $x(t, x_0)$ в некоторой окрестности положения равновесия обеспечивается при условии полноты рассматриваемой системы. Тогда под непрерывностью отображения подразумевается «близость» интегральных кривых (3.2), порождаемых близкими значениями x_0 . Требование непрерывности может быть сформулировано также классическим образом (см. рис. 3.1, а):

для любых $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех начальных значений x_0 , удовлетворяющих условию

$$|x_0 - x^*| < \delta, \quad (3.3)$$

и всех $t \geq 0$ выполняется

$$|x(t, x_0) - x^*| < \varepsilon. \quad (3.4)$$

Разрывность отображения, определяющая неустойчивость системы, подразумевает, что даже для близких к положению равновесия начальных значений x_0 возможно получение траекторий $x(t, x_0)$, значительно удаляющихся от положения равновесия (см. рис. 3.1, б), т. е.

для некоторого значения $\varepsilon > 0$ не существует числа $\delta > 0$, для которого выполняются неравенства (3.3)–(3.4).

Замечание 3.1. Неограниченный рост $|x(t, x_0) - x^*|$ является признаком неустойчивости системы. Тем не менее ограниченность решений — *необходимое* условие достижения всех видов устойчивости точечных положений равновесия — не служит *достаточным* основанием для вывода об устойчивости по Ляпунову *нелинейной* системы. \square

Пример 3.1. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = x - x^3, \quad (3.5)$$

определенную в пространстве \mathbb{R}^1 . Система имеет 3 положения равновесия: 0, 1 и -1. Для начальных значений $|x_0| < 1$ выполняется:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_0 > 0, \\ -1 & \text{при } x_0 < 0, \end{cases}$$

и $|x(t)| < 1$. Следовательно, решения системы ограничены. Несмотря на это положение равновесия $x = 0$ неустойчиво (рис. 3.2). \square

Аналогичные примеры дают нелинейные системы, имеющие неустойчивые положения равновесия и устойчивые предельные циклы, которые и обеспечивают ограниченность траекторий, начинающихся из начальных точек, близких к положению равновесия.

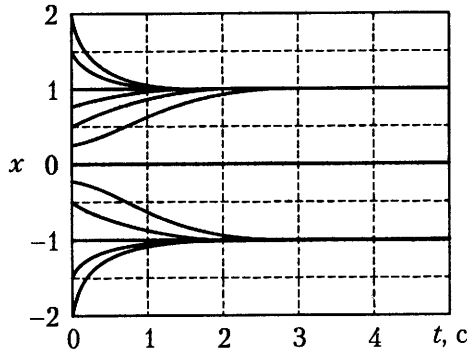


Рис. 3.2. Локальная асимптотическая устойчивость

Следующее понятие связано с асимптотическими свойствами решений $x(t, x_0)$ при $t \rightarrow \infty$ и сходимостью траекторий системы к устойчивому положению равновесия (см. рис. 3.1, в).

Определение 3.3. Равновесное состояние x^* (или система (3.1) в точке x^*) называется *асимптотически устойчивым*, если это состояние

- а) устойчиво по Ляпунову;
- б) является аттрактором, т. е. для любых $x_0 \in \mathcal{E}^0(x^*)$ удовлетворяет условию аттрактивности (притяжения)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = x^*. \quad (3.6)$$

Окрестность $\mathcal{E}^0(x^*)$ называется *областью притяжения*.

В соответствии с определением предела заметим, что свойство притяжения (*аттрактивности*) указанного состояния x^* означает, что

существует $\delta^0 > 0$, и для любых $\varepsilon > 0$ и всех начальных значений x_0 , удовлетворяющих условию

$$|x_0 - x^*| < \delta^0, \quad (3.7)$$

найдется $\Delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такое, что для всех $t \geq \Delta(\varepsilon, x_0)$ выполняется

$$|x(t, x_0) - x^*| < \varepsilon. \quad (3.8)$$

Пример 3.2. Рассмотрим систему (2.39), определенную во всем пространстве $\mathbb{R}^1 = (-\infty, +\infty)$. Система имеет два равновесных состояния $x^* = -1$ и $x^* = 0$. Последнее асимптотически устойчиво (см. рис. 2.11, а) с областью притяжения $\mathcal{E}^0(0) = (-1, \infty)$. Положение равновесия $x^* = -1$ неустойчиво уже потому, что система не является полной ни в какой из его окрестностей. \square

Пример 3.3. Рассмотрим систему (2.5), определенную во всем пространстве \mathbb{R}^1 (см. примеры 2.1 и 2.11, рис. 2.9, а). Несмотря на приближение кривых переходных процессов к точке 0, система не является асимптотически устойчивой ввиду отсутствия положения равновесия (точка $x = 0$ является сингулярной) и неполноты системы. \square

В общем случае само свойство притяжения (3.6) еще не гарантирует асимптотической устойчивости системы, так как из аттрактивности положения равновесия не всегда следует его устойчивость по Ляпунову (см. определение 3.3, а).

Пример 3.4. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_2^2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1x_2, \quad (3.9)$$

где $x \in \mathcal{X} = \mathbb{R}^1$. Ее положение равновесия $x = 0$ является точечным аттрактором (рис. 3.3), однако не устойчиво по Ляпунову и, следовательно, не является асимптотически устойчивым. Действительно, траектории, выходящие из точек с координатами $(x_1, 0)$, где $x_1 > 0$, сколь угодно близких к равновесному состоянию, со временем уходят в бесконечность (т. е. покидают любую ε -окрестность), а затем возвращаются из правой полуплоскости. \square

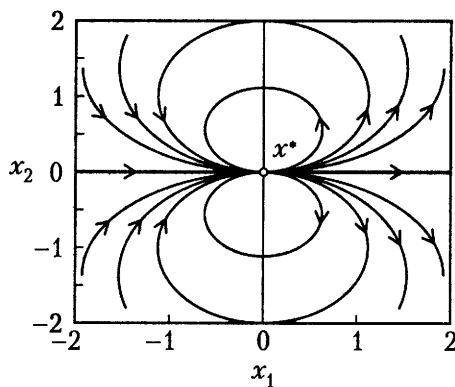


Рис. 3.3. Неустойчивость системы с аттрактивным положением равновесия

Важной особенностью нелинейных систем является зависимость их поведения от начальных значений x_0 . Если характеристики системы при вариации начальных значений не изменяются, то соответствующее свойство устойчивости называется *равномерным*.

Так, для обеспечения устойчивости, а следовательно, и асимптотической устойчивости системы, обладающей притягивающим положением равновесия, требуется выполнение условия *равномерной аттрактивности*, которое (в отличие от стандартного условия (3.6)) означает, что предельное соотношение (3.6) выполняется

равномерно по начальным значениям x_0 [17], и в неравенстве (3.8) число Δ можно выбрать независимо от x_0 .

Теорема 3.1. Равновесное состояние x^* системы (3.1) асимптотически устойчиво, если оно является равномерно притягивающим, т. е. для всех начальных значений $x_0 \in \mathcal{E}^0(x^*)$ условие аттрактивности (3.6) выполняется равномерно по $x_0 \in \mathcal{E}^0(x^*)$.

Отметим, что для рассматриваемых здесь стационарных систем (3.1) равновесное состояние x^* всегда *равномерно* устойчиво по Ляпунову, если оно устойчиво.

Определение 3.4. Равновесное состояние x^* (или система (3.1) в точке x^*) называется *равномерно асимптотически устойчивым* в области $\mathcal{E}^0(x^*)$, если на множестве $\mathcal{E}^0(x^*)$ оно является равномерно притягивающим по x_0 , т. е. для всех $x_0 \in \mathcal{E}^0(x^*)$ предельное соотношение (3.6) выполняется равномерно по $x_0 \in \mathcal{E}^0(x^*)$, или в неравенстве (3.8) число Δ не зависит от x_0 .

Нетрудно показать, что система (2.40) (см. пример 2.20 и рис. 2.11, б) является равномерно асимптотически устойчивой по x с областью равномерного притяжения \mathbb{R}^1 . В то же время переходные процессы асимптотически устойчивой в точке $x = 0$ системы (2.39) (см. пример 2.19 и рис. 2.11, а) в области притяжения $(-1, \infty)$ не удовлетворяют условию равномерной сходимости, так как при $x_0 \rightarrow -1$ $\Delta \rightarrow \infty$. Тем не менее (см. примеры 3.5 и 3.11) эта система является равномерно устойчивой в любой области $(\alpha - 1, \infty)$, где $0 < \alpha < 1$.

Наиболее сильные притягивающие свойства положения равновесия нелинейной системы обеспечиваются при условии экспоненциального затухания переходных процессов, которое фигурирует в следующем понятии.

Определение 3.5. Равновесное состояние x^* (или система (3.1) в точке x^*) называется *экспоненциально устойчивым*, если для всех $x_0 \in \mathcal{E}^0(x^*)$ найдутся $\beta > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что при $t \geq 0$ выполняется

$$|x(t, x_0) - x^*| \leq \beta e^{-\alpha t} |x_0 - x^*|. \quad (3.10)$$

Окрестность $\mathcal{E}^0(x^*)$ называется *областью экспоненциального притяжения* системы.

Неравенство (3.10) устанавливает экспоненциальную мажоранту процессов из области $\mathcal{E}^0(x^*)$ с параметрами β , α , которая может служить для оценки качества системы в некоторой окрестности ее положения равновесия. Так как из условия экспоненциальной устойчивости всегда следует равномерная асимптотическая устойчивость системы, то неравенство (3.10) часто используется для проверки равномерной сходимости.

Напомним, что для *линейных* систем экспоненциальная устойчивость является также и необходимым условием равномерной асимптотической устойчивости, т. е. здесь указанные понятия эквивалентны.

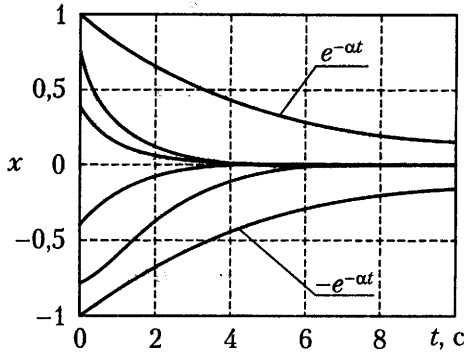


Рис. 3.4. Экспоненциальная устойчивость системы (2.39)

Пример 3.5. Рассмотрим нелинейную систему (2.39), определенную в области $\mathcal{X} = (-1, +\infty)$, и положение равновесия $x^* = 0$ (см. пример 2.16). Пусть $x_0 \in (-1 + \alpha, \infty)$, где $0 < \alpha < 1$. Нетрудно показать (см. пример 3.11 и рис. 3.4), что переходные процессы системы удовлетворяют неравенству

$$|x| \leq e^{-\alpha t} |x_0|. \quad (3.11)$$

По определению система является экспоненциально устойчивой с областью притяжения $(-1 + \alpha, \infty)$, а следовательно, и равномерно устойчивой по x_0 . \square

Приведенные выше определения устойчивости носят локальный характер, так как устанавливают свойства системы лишь в некоторой окрестности равновесного состояния x^* . Это обусловлено естественными особенностями нелинейных систем, поведение которых в разных областях пространства \mathbb{R}^n может существенно различаться (см. примеры 2.4, 2.20, 3.1 и др.). В то же время для линейных и целого ряда нелинейных систем положение равновесия единственно, и свойства устойчивости приобретают *глобальный* характер, т. е. могут быть распространены на пространство состояний в целом (см. систему (2.40), пример 2.20).

Определение 3.6. Пусть $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, система (3.1) является полной в \mathbb{R}^n и имеет единственное равновесное состояние $x = x^*$.

Система называется *глобально асимптотически устойчивой*, или *асимптотически устойчивой в целом*, если равновесное состояние x^* является устойчивым по Ляпунову и глобально притягивающим, т. е. $\mathcal{E}^0(x^*) = \mathbb{R}^n$.

Система называется *равномерно глобально асимптотически устойчивой*, если равновесное состояние x^* равномерно устойчиво по Ляпунову и является равномерно глобально притягивающим, т. е. $\mathcal{E}^0(x^*) = \mathbb{R}^n$, и предельное соотношение (3.6) выполняется равномерно по $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Система называется *глобально экспоненциально устойчивой*, если для всех начальных значений $x_0 \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство (3.10).

3.1.2. Первый метод Ляпунова

Одним из эффективных и простых методов анализа локальных свойств гладкой системы (3.1) является *первый метод Ляпунова*, который предусматривает исследование поведения системы по аппроксимированной (линеаризованной) модели. Для получения такой модели введем в рассмотрение n -мерный вектор

$$\tilde{x} = x - x^*,$$

характеризующий отклонение текущего состояния от положения равновесия x^* . Полагая, что функция $f(x)$ в точке $x = x^*$ гладкая, представим ее разложение в ряд Тейлора:

$$f(x) = f(x^*) + F\tilde{x} + o(\tilde{x}),$$

где матрица

$$F = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^*}$$

называется *матрицей Якоби нелинейной системы*, а вектор-функция $o(\tilde{x})$ представляет остаточный член разложения. Если отклонение \tilde{x} достаточно мало, остаточным членом $o(\tilde{x})$ обычно можно пренебречь и записать *линеаризованную модель* нелинейной системы

$$\dot{\tilde{x}} = F\tilde{x}, \quad (3.12)$$

положением равновесия которой является точка $\tilde{x}^* = 0$. В соответствии с линейной теорией такая модель асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда матрица F гурвицева (устойчива), т. е. ее собственные числа $\lambda_i\{F\}$ расположены в левой полуплоскости комплексной плоскости:

$$\operatorname{Re} \lambda_i\{F\} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.13)$$

Однако в общем случае свойства основной системы (3.1) и линеаризованной модели (3.12) все-таки не совпадают, и поэтому возникает необходимость привлечения дополнительного условия и следующей формулировки теоремы *Ляпунова–Пуанкаре*.

Теорема 3.2. Пусть $f(x)$ — достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{\tilde{x} \rightarrow 0} \frac{o(\tilde{x})}{|\tilde{x}|} = 0. \quad (3.14)$$

Тогда равновесное состояние $x^* \in \mathcal{X}$ нелинейной системы (3.1) асимптотически устойчиво, если матрица Якоби системы гурвицева.

Пример 3.6. Рассмотрим систему (3.5) (см. пример 3.1), которая имеет три равновесных состояния $x^* = -1, 0, 1$. Найдем

$$F = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^*} = 1 - 3x^{*2}.$$

В точках $x^* = \pm 1$ получаем $F = 2$, что свидетельствует об асимптотической устойчивости этих положений равновесия, а в точке $x^* = 0$ будет $F = 1$ и, следовательно, устойчивость этого положения равновесия не гарантируется (см. рис. 3.2). \square

Отметим, что теорема предлагает только достаточные условия, и в целом ряде случаев асимптотически устойчивые нелинейные системы не удовлетворяют ее требованиям. Так, система (2.40) (пример 2.20) асимптотически устойчива (в целом), однако

$$F = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*=0} = 3x^2 \Big|_{x^*=0} = 0.$$

3.1.3. Второй метод Ляпунова

Наибольшее распространение для анализа и синтеза сложных систем управления получил *второй (или прямой) метод Ляпунова*. Метод основан на использовании скалярных функций, обладающих на решениях динамической системы некоторыми специальными свойствами и получивших название *функций Ляпунова*. Функции Ляпунова позволяют оценить устойчивость и качество системы, а также синтезировать алгоритмы управления, обеспечивающие заданные качественные показатели процессов. Достаточные условия устойчивости (см. определения 3.2–3.3) представлены в теоремах, доказанных А. М. Ляпуновым в 1892 г.

Будем рассматривать стационарные динамические системы вида (3.1), определенные на открытом множестве \mathcal{X} , где $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, полагая, что удовлетворяются условия существования и единственности решений, а сами решения определены на полубесконечном интервале времени $[0, \infty)$, т. е. системы являются полными (см. 2.2.1–2.2.3). Пусть равновесным состоянием системы является точка $x = x^* = 0$, и, следовательно, $f(0) = 0$.

Функции Ляпунова. Прежде всего введем некоторые дополнительные понятия *знакоопределенных* функций. Рассмотрим скалярные функции $V(x)$, определенные в точке $x = 0$ и ее окрестности $\mathcal{E}(0) = \mathcal{X}$.

Функция $V(x)$ называется *положительно определенной (определенно положительной)* в области \mathcal{X} , если для всех $x \in \mathcal{X}$ выполняется

$$V(x) > 0 \text{ при } x \neq 0, \quad V(0) = 0,$$

и *отрицательно определенной (определенно отрицательной)*, если

$$V(x) < 0 \text{ при } x \neq 0, \quad V(0) = 0.$$

Функция $V(x)$ называется *неотрицательной (положительно полуопределенной)* в области \mathcal{X} , если для всех $x \in \mathcal{X}$

$$V(x) \geq 0,$$

и *неположительной (отрицательно полуопределенной)*, если

$$V(x) \leq 0.$$

Положительно определенная в \mathbb{R}^n возрастающая (при увеличении $|x|$) функция $V(x)$ называется *неограниченно возрастающей*, если

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty.$$

Пример 3.7. Функция

$$|x|_P = (x^T P x)^{1/2}, \quad (3.15)$$

где $P = P^T > 0$, определяющая евклидову норму (длину) вектора $x \in \mathbb{R}^n$, относится к положительно определенным во всем пространстве состояний \mathbb{R}^n . В пространстве \mathbb{R}^{n+1} ей соответствует геометрический объект, называемый конусом (рис. 3.5, а). Линии равного уровня $|x|_P = C = \text{const}$ в пространстве состояний \mathbb{R}^n образуют эллипсы, соответствующие векторам «равной» длины (рис. 3.5, б), причем увеличению вектора x соответствует увеличение параметра C и переход на внешний эллипс. Для случая $P = I$ (единичная норма) получаем круговой конус, где линии равного уровня являются окружностями

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = C^2.$$

□

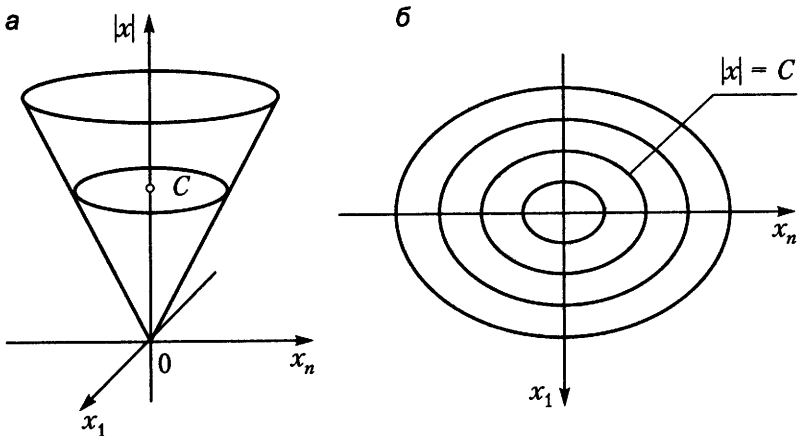


Рис. 3.5. Евклидова норма: поверхность и линии равного уровня

Пример 3.8. Свойства квадратичной функции

$$V(x) = |x|_P^2 = x^T P x, \quad (3.16)$$

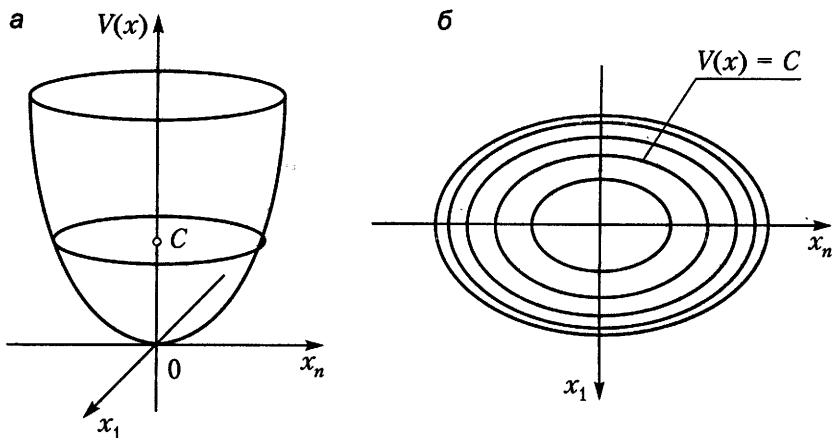


Рис. 3.6. Квадратичная положительно определенная функция

где $P = P^T$, зависят от выбора матрицы P . Для положительно определенной матрицы, т. е. $P > 0$, функция $V(x)$ также является положительно определенной (в \mathbb{R}^n), а при $P \geq 0$ функция $V(x)$ неотрицательна.

В пространстве \mathbb{R}^{n+1} положительно определенная функция $V(x)$ представляет параболический эллипсоид (рис. 3.6). В пространстве состояний \mathbb{R}^n линии равного уровня $|x|_P^2 = C = \text{const}$ эллипсоида (3.16)) образуют (как и для фигуры (3.15)) эллипсы, соответствующие векторам «равной» длины, а увеличению вектора x соответствует увеличение параметра C и переход на внешний эллипс.

Для случая $P \geq 0$ (положительно полуопределенная матрица) получаем фигуру типа «желоб» (рис. 3.7), которая касается подпространства \mathbb{R}^n не только в точке $x = 0$, но и на линии $Px = 0$, что и приводит к получению неотрицательной функции $V(x)$.

Отметим, что положительно определенные функции (3.15) и (3.16) являются неограниченно возрастающими при увеличении $|x|$, что и обуславливает их глобальные свойства. Однако в общем случае знакоопределенные функции должны удовлетворять условию положительности (отрицательности) только в некоторой окрестности точки 0, что не исключает возможность их убывания (возрастания) при некотором удалении от точки $x = 0$. \square

К функциям Ляпунова будем относить непрерывно дифференцируемые скалярные функции $V(x) \in C^1$, которые являются положительно определенными в некоторой окрестности положения равновесия $x = 0$. Такие функции часто отождествляют с энергией системы. Уменьшение $V(x)$, соответствующее приближению устойчивой системы к положению равновесия, ассоциируется с рассеиванием энергии, а увеличение $V(x)$, соответствующее удалению от положения равновесия, — с нежелательным ростом энергетического запаса (см. теоремы 3.3–3.5, а также п. 3.2).

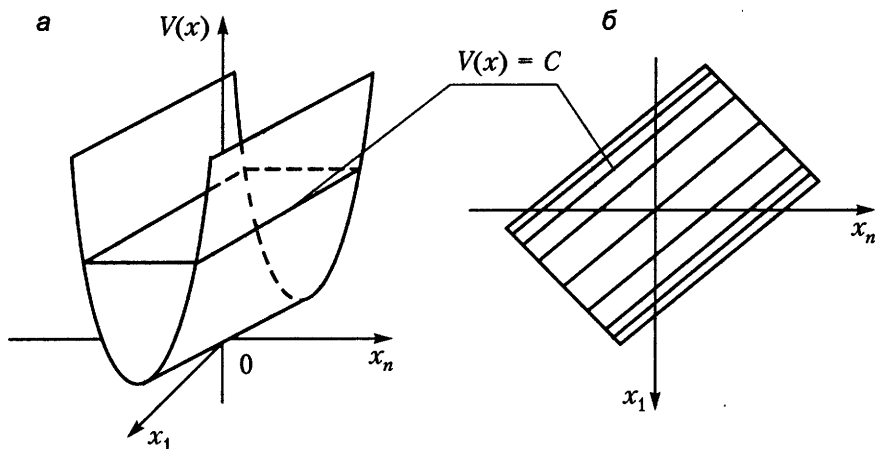


Рис. 3.7. Квадратичная неотрицательная функция

Важно отметить, что при необходимости к функциям Ляпунова могут быть предъявлены дополнительные требования — положительной определенности во всем пространстве \mathbb{R}^n , неограниченного роста и т. п. С другой стороны, применяются и просто непрерывные функции Ляпунова ($V(x) \in C^0$), например, вида (3.15). Все это позволяет расширить круг исследуемых задач устойчивости.

Наиболее распространенной функцией Ляпунова является квадратичная функция (3.16), которую можно записать как

$$V(x) = |x|_P^2,$$

где $P = P^T > 0$, что показывает связь функции с нормой вектора x , и следовательно, с основными понятиями устойчивости. Для асимптотически устойчивой системы функция должна убывать с течением времени, т. е. $\dot{V}(x) < 0$, для неустойчивой системы — возрастать: $\dot{V}(x) > 0$, для системы, устойчивой по Ляпунову, возможны движения с постоянной функцией $V(x)$ и нулевой производной: $\dot{V}(x) = 0$. Это указывает на то, что для анализа устойчивости системы необходимо установить свойства производной от функции Ляпунова для решений (2.2).

Производной функции Ляпунова $V(x)$ системы (3.1) (или производной в силу уравнения (3.1)) называется скалярная функция

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x), \quad (3.17)$$

Пример 3.9. Рассмотрим квадратичную функцию Ляпунова (3.16). Ее частная производная по x определяется выражением

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^T P x) = 2 x^T P, \quad (3.18)$$

и следовательно,

$$\dot{V}(x) = 2 x^T P f(x). \quad (3.19)$$

□

Основные теоремы. Частная производная $\partial V/\partial x$ представляет собой градиент функции Ляпунова (см. 1.1.2):

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T = \nabla V(x),$$

который направлен по нормали к касательным линиям равного уровня $V(x) = C$ в сторону увеличения функции $V(x)$. Тогда в каждой точке x производная функции Ляпунова (3.17) является скалярным произведением указанного градиента на вектор f , касательный к фазовой траектории системы в точке x . Для асимптотически устойчивой системы, фазовая траектория которой приближается к положению равновесия (рис. 3.8, а), рассматриваемое скалярное произведение всегда отрицательно, и следовательно, $\dot{V}(x) < 0$, для неустойчивой системы (рис. 3.8, б) — положительно, и $\dot{V}(x) > 0$, а для системы, устойчивой по Ляпунову, возможна ортогональность градиента и траектории, т. е. $\dot{V}(x) = 0$. Эти соображения положены в основу доказательства следующих теорем Ляпунова (подробные доказательства приведены, в частности, в [26, 31]).

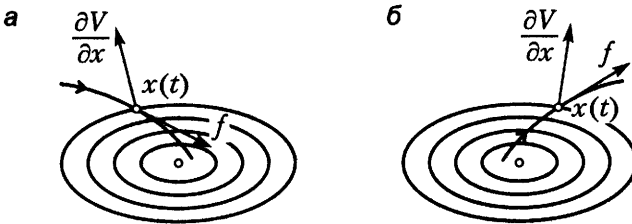


Рис. 3.8. Пересечение линий равного уровня устойчивой (а) и неустойчивой (б) системы

Теорема 3.3 (1-я теорема Ляпунова). Равновесное состояние $x = 0$ системы (3.1) устойчиво по Ляпунову, если в некоторой окрестности $\mathcal{E}(0)$ существует функция Ляпунова $V(x)$, производная которой $\dot{V}(x)$ является неположительной:

$$\dot{V}(x) \leq 0.$$

Теорема 3.4 (2-я теорема Ляпунова). Равновесное состояние $x = 0$ системы (3.1) асимптотически устойчиво, если в некоторой окрестности $\mathcal{E}(0)$ существует функция Ляпунова $V(x)$, производная которой $\dot{V}(x)$ является отрицательно определенной:

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ при } x \neq 0, \quad \dot{V}(0) = 0. \quad (3.20)$$

Замечание 3.2. При условии, что

$$\dot{V}(x) \leq -W(x), \quad (3.21)$$

где $W(x) > 0$ — неограниченно возрастающая функция, теорема 3.4 допускает более сильное утверждение:

равновесное состояние системы асимптотически устойчиво равномерно по x_0 (см. определение 3.4). \square

Теорема 3.5 (3-я теорема Ляпунова). Равновесное состояние $x = 0$ системы (3.1) неустойчиво, если существует непрерывная функция $V(x)$ такая, что

а) $V(0) = 0$;

б) ее производная $\dot{V}(x)$ в некоторой окрестности $\mathcal{E}(0)$ является отрицательно определенной:

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ при } x \neq 0, \quad \dot{V}(0) = 0;$$

в) в любой сколь угодно малой окрестности равновесного состояния найдется точка $x = x_0$, в которой

$$V(x_0) < 0.$$

Отметим, что в последней теореме функция $V(x)$ является, вообще говоря, знакопеременной. Тогда в силу условия $\dot{V}(x_0) = (\partial V / \partial x) f(x_0) < 0$ получаем, что траектория системы в точке $x = x_0$ направлена в сторону убывания $V(x)$. Так как по условиям теоремы $V(x_0) < 0$ и $V(0) = 0$, то уменьшение отрицательной функции $V(x)$ характеризует движение от положения равновесия $x = 0$ и, следовательно, является признаком неустойчивости системы.

Условия экспоненциальной устойчивости даются следующей теоремой.

Теорема 3.6. Равновесное состояние $x = 0$ системы (3.1) экспоненциально устойчиво, если в некоторой окрестности $\mathcal{E}(0)$ существует функция Ляпунова $V(x)$, которая удовлетворяет следующему условию:

$$\dot{V}(x) + 2\alpha V(x) \leq 0, \quad (3.22)$$

где $\alpha > 0$.

Отметим, что неравенство (3.22) имеет решение

$$V(x) \leq e^{-2\alpha t} V(0), \quad (3.23)$$

что показывает, что функция Ляпунова (а следовательно, и $|x|$) со временем приближается к нулевому значению, причем темп сходимости определяется числом α .

Пример 3.10. Для квадратичной функции Ляпунова (3.16) из неравенства (3.23) получим $|x|_P^2 \leq e^{-2\alpha t} |x_0|_P^2$, и следовательно,

$$|x|_P \leq e^{-\alpha t} |x_0|_P. \quad (3.24)$$

Последнее в точности соответствует условию экспоненциальной устойчивости (3.10), где $\beta = 1$. \square

Пример 3.11. Рассмотрим нелинейную систему (2.39), определенную в области $\mathcal{X} = (-1, +\infty)$, и положение равновесия $x^* = 0$. Пусть $x_0 \in (-1 + \alpha, \infty)$, где $0 < \alpha < 1$. Выберем функцию Ляпунова $V = x^2$. Найдем

$$\dot{V} = 2x(-x - x^2) \leq -2\alpha x^2 = -2\alpha V.$$

Следовательно, выполняется неравенство (3.22), и

$$|x| \leq e^{-\alpha t} |x_0|,$$

т. е. система является экспоненциально устойчивой с областью притяжения $(-1 + \alpha, \infty)$ (см. рис. 3.4). \square

При изучении условий глобальной асимптотической устойчивости (см. определение 3.6) будем полагать, что система определена на всем пространстве \mathbb{R}^n и обладает лишь одним состоянием равновесия $x = 0$.

Теорема 3.7. Пусть $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$. Система (3.1) глобально асимптотически устойчива в точке $x = 0$, если существует определенная во всем пространстве \mathbb{R}^n возрастающая функция Ляпунова $V(x)$, производная которой $\dot{V}(x)$ является отрицательно определенной в \mathbb{R}^n :

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ при } x \neq 0, \quad \dot{V}(0) = 0.$$

Замечание 3.2а. При условии, что

$$\dot{V}(x) \leq -W(x), \quad (3.25)$$

где $W(x) > 0$ — неограниченно возрастающая функция, теорема 3.7 допускает более сильное утверждение:

равновесное состояние системы глобально асимптотически устойчиво равномерно по x_0 (см. определение 3.4). \square

В сложных случаях может быть полезна следующая модификация теоремы 3.7.

Теорема 3.8 (теорема Барбашина–Красовского). Пусть $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$. Система (3.1) глобально асимптотически устойчива в точке $x = 0$, если существует определенная во всем пространстве \mathbb{R}^n возрастающая функция Ляпунова $V(x)$ такая, что

а) производная \dot{V} является неположительной в \mathbb{R}^n , т. е.

$$\dot{V}(x) \leq 0;$$

б) на множестве

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = 0\},$$

т. е. при $\dot{V}(x) = 0$, имеет место тождество $x(t) \equiv 0$.

Основным достоинством метода функций Ляпунова является отсутствие необходимости вычисления всех решений системы. С другой стороны, в общем случае метод не предлагает процедуры выбора подходящей функции V , что и является его основным недостатком. Тем не менее в ряде частных случаев, к которым безусловно относятся линейные системы, можно воспользоваться достаточно простыми квадратичными функциями Ляпунова (см. 3.1.4 и 6.3.1).

3.1.4. Устойчивость линейных и линеаризованных систем

Рассмотрим линейную модель

$$\dot{x} = Ax \tag{3.26}$$

с положением равновесия $x = 0$. Напомним (см. 3.1.2), что модель может быть получена в результате линеаризации гладкой нелинейной системы (3.1). Необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости линейной системы является гурвицевость (устойчивость) матрицы A :

$$\operatorname{Re} \lambda_i \{A\} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Введем в рассмотрение квадратичную функцию Ляпунова (3.16), где $P = P^T$. С учетом выражений (3.18) и (3.26) получим

$$\dot{V} = x^T(A^T P + PA)x. \tag{3.27}$$

Пусть матрица P является решением алгебраического уравнения, называемого *уравнением Ляпунова*:

$$A^T P + PA = -Q, \tag{3.28}$$

где $Q = Q^T > 0$. Тогда уравнение (3.27) принимает вид

$$\dot{V} = -x^T Q x. \tag{3.29}$$

Если матрица P , найденная как решение уравнения (3.28), положительно определена ($P > 0$), то выбранная функция $V(x)$ является функцией Ляпунова, производная которой в силу уравнения (3.28) и выбора $Q > 0$ — отрицательно определенная функция. Тогда в соответствии с теоремой 3.7 можно заключить, что система (3.26) асимптотически устойчива в целом. Имеет место и обратное утверждение.

Лемма Ляпунова. Система (3.26) асимптотически устойчива (матрица A — гурвицева) тогда и только тогда, когда для любой матрицы $Q > 0$ найдется решение $P > 0$ уравнения (3.28).

Отметим, что формулировка леммы остается справедливой и при

$$Q = qq^T,$$

где матрица-строка q^T удовлетворяет условию полной наблюдаемости пары (A, q^T) .

Если система асимптотически устойчива и $Q > 0$, всегда можно отыскать положительное число α_0 такое, что

$$Q \geq 2\alpha_0 P.$$

Тогда из уравнения (3.29) получим

$$\dot{V} \leq -2\alpha_0 V. \quad (3.30)$$

и, следовательно, система экспоненциально устойчива (см. теорему 3.6).

Справедливы также следующие свойства, позволяющие определить степень устойчивости и установить экспоненциальную устойчивость линейной системы. Выберем $Q = Q_0 + 2\alpha P$, где $Q_0 = Q_0^T > 0$. Тогда уравнение (3.28) принимает вид

$$A^T P + P A = -Q_0 - 2\alpha P \quad (3.31)$$

или

$$(A + \alpha I)^T P + P(A + \alpha I) = -Q_0, \quad (3.32)$$

По лемме Ляпунова заключаем, что существование положительно определенного решения уравнения (3.31) является необходимым и достаточным условием устойчивости матрицы $A + \alpha I$:

$$\operatorname{Re} \lambda_i \{A + \alpha I\} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

и следовательно, получения степени устойчивости системы α :

$$\operatorname{Re} \lambda_i \{A\} < -\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

С другой стороны, подставляя (3.31) в (3.27), находим

$$\dot{V} < -2\alpha V. \quad (3.33)$$

Последнее выражение в соответствии с теоремой 3.6 устанавливает экспоненциальную устойчивость линейной системы с оценкой (3.24). Таким образом, имеет место следующий результат.

Следствие 3.1 (лемма Калмана). Система (3.26) экспоненциально устойчива и имеет степень устойчивости α тогда и только тогда, когда для любой матрицы $Q_0 > 0$ найдется решение $P > 0$ уравнения (3.31).

Принимая во внимание теорему 3.2, результаты можно обобщить на гладкие нелинейные системы.

Следствие 3.2. Пусть $f(x)$ — достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условиям $f(0) = 0$ и (3.14). Тогда равновесное состояние $x^* = 0 \in \mathcal{X}$ нелинейной системы (3.1) с матрицей Якоби $A = \partial f / \partial x|_{x=0}$

а) асимптотически устойчиво, если для любой матрицы $Q > 0$ найдется решение $P > 0$ уравнения (3.28);

б) экспоненциально устойчиво с оценкой (3.24), если для любой матрицы $Q_0 > 0$ найдется решение $P > 0$ уравнения (3.31).

3.2. Частичная устойчивость и устойчивость по выходу

В традиционных задачах теории управления представление о желаемом поведении системы связывается с понятием устойчивости по всем переменным состояния x_i . Тем не менее во многих теоретических и прикладных проблемах управления больший интерес представляет *частичная устойчивость* динамической системы, т. е. ее устойчивость по части переменных состояния x_i , по некоторым функциям от x_i или по выходным переменным y_j . Частичная устойчивость допускает очевидную геометрическую трактовку, связанную с инвариантностью и аттрактивностью многомерных множеств (см. 2.1.3).

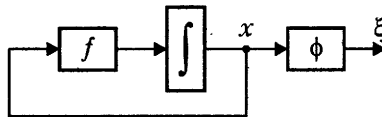


Рис. 3.9. Система и функция ξ

Будем рассматривать гладкую динамическую систему (рис. 3.9)

$$\dot{x} = f(x), \quad (3.34)$$

$$\xi = \phi(x), \quad (3.35)$$

где $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $\xi = \{\xi_i\} \in \Xi \subset \mathbb{R}^\rho$, $\rho \leq n$, Здесь полагаем, что $f(x)$ и $\phi(x)$ — гладкие вектор-функции, и модель (3.34) является полной в области \mathcal{X} (см. 2.2.3). Отображение (3.35) вводит вектор ρ переменных $\xi_i(t)$, по отношению к которым и будет рассматриваться задача частичной устойчивости.

Решением системы (3.34)–(3.35) называется функция

$$\xi(t) = \xi(t, x_0) = \phi(x(t, x_0)), \quad (3.36)$$

определенная при $t \geq 0$.

Частичное положение равновесия такой системы вводится как точка $\xi^* \in \Xi$, для которой $\xi(t, x_0) \equiv \xi^*$, а вопрос о частичной устойчивости решается в зависимости от свойства непрерывности отображения $x_0 \mapsto \xi(t, x_0)$ и притяжения решений (3.36) к точке ξ^* , т. е. $\xi(t, x_0) \rightarrow \xi^*$.

Отметим, что во всех определениях частичной устойчивости требование полноты системы (см. 2.2.3) приобретает особую значимость, поскольку рассмотрение функций $\xi(t)$ при $t \geq 0$, необходимое для решения вопроса о частичной устойчивости, теряет смысл, если некоторые переменные состояния определены лишь на конечном интервале времени (см. пример 3.16).

Очевидно, что при $\rho = n$ и $\phi(x) = x$ приведенная концепция соответствует стандартным понятиям устойчивости точечного положения равновесия $x = x^*$ (см. определения 3.1–3.3), в то время как в общем случае компонентами вектора $\xi = \phi(x)$ являются *лишь некоторые* переменные состояния x_i , выходы системы или иные существенные переменные (энергия, мощность, квадратичные отклонения и проч.).

3.2.1. Устойчивость по части переменных

Задача устойчивости динамической системы по отношению к *части переменных* состояния [22, 26] является частным случаем проблемы частичной устойчивости, когда вектор ξ представлен некоторым набором переменными состояния системы (3.34), т. е. можно записать

$$x = \begin{bmatrix} \xi \\ z \end{bmatrix},$$

где $\xi \in \Xi$ — ρ -мерный вектор, $z \in \mathcal{Z}$ — ν -мерный вектор, $\Xi \times \mathcal{Z} = \mathcal{X}$ и $\nu = n - \rho$. Здесь нелинейная система состоит из двух взаимосвязанных подсистем с переменными состояниями ξ_i и z_i соответственно (рис. 3.10, а). Уравнение (3.34) можно переписать в виде

$$\dot{\xi} = f^1(\xi, z), \quad (3.37)$$

$$\dot{z} = f^2(\xi, z), \quad (3.38)$$

где f^1 и f^2 — гладкие вектор-функции, $\xi(0) = \xi_0$, $z(0) = z_0$, а выражение (3.35) принимает вид

$$\xi = [I \ 0]x.$$

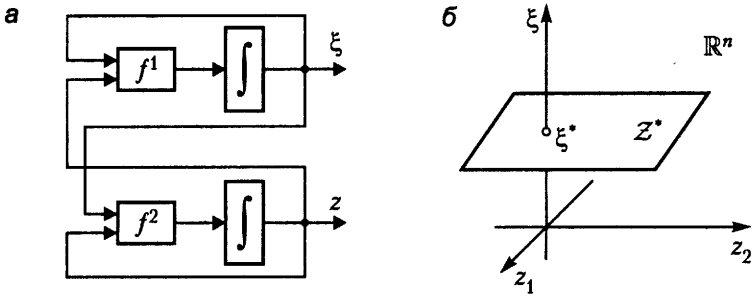


Рис. 3.10. Взаимосвязанные подсистемы и инвариантная гиперплоскость

Рассмотрим решения системы (3.37)

$$\xi(t) = \xi(t, x_0), \quad t \geq 0, \quad (3.39)$$

где $x_0 = (\xi_0, z_0)$, и точку $\xi^* \in \Xi$. Условие $\xi = \xi^*$ определяет в пространстве \mathbb{R}^n ν -мерную гиперплоскость (см. рис. 3.10, б и 1.1.4):

$$\mathcal{Z}^* = \{x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n : \xi = \xi^*, z \in \mathcal{Z}\}.$$

Введем следующее понятие.

Определение 3.7. Точка $\xi = \xi^*$ называется (*частичным*) *положением равновесия* системы (3.37)–(3.38), когда для всех $x_0 \in \mathcal{Z}^*$ решения (3.39) удовлетворяют условию

$$\xi(t, x_0) \equiv \xi^*. \quad (3.40)$$

Из определения следует, что все траектории, начинающиеся на \mathcal{Z}^* , целиком лежат на этой плоскости, т. е. \mathcal{Z}^* является инвариантной гиперповерхностью рассматриваемой системы (см. определение 2.5). Критерий указанного типа равновесия получается из уравнения (3.37) при $\xi = 0$ и принимает вид

$$f^1(\xi^*, z) = 0,$$

что должно выполняться для любых $z \in \mathcal{Z}$.

С другой стороны, для любых $x_0 \in \mathcal{Z}^*$ и $t \geq 0$ поведение n -мерной динамической системы полностью описывается системой ν уравнений

$$\dot{z} = f_0^2(z), \quad (3.41)$$

где $f_0^2(z) = f^2(\xi^*, z)$, т. е. имеет место редукция основной модели рассматриваемой системы.

Рассмотрим поведение системы в малой окрестности плоскости Z^* , т. е. на множестве $\mathcal{E}(Z^*) \subset \mathcal{X}$, и введем следующие понятия устойчивости по части переменных.

Определение 3.8. Система (3.37)–(3.38) в положении равновесия $\xi = \xi^*$ называется *устойчивой по части переменных*, когда для любых $x_0 \in \mathcal{E}(Z^*)$ отображение $x_0 \mapsto \xi(t, x_0)$, где $t \geq 0$, непрерывно в точках $x_0 = (\xi^*, z)$;

система называется *асимптотически устойчивой по части переменных с областью притяжения* $\mathcal{E}^0(Z^*) \subset \mathcal{X}$, когда она устойчива по части переменных и для любых $x_0 \in \mathcal{E}^0(Z^*)$ выполняется условие аттрактивности

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t, x_0) = \xi^*; \quad (3.42)$$

система называется *глобально (в целом) асимптотически устойчивой по части переменных*, когда $\mathcal{X} = \mathcal{E}^0(Z^*) = \mathbb{R}^n$.

Отметим, что определения не требуют, чтобы система имела точечные положения равновесия $x^* \in \mathbb{R}^n$ и тем более была бы устойчивой (асимптотически устойчивой) по всем переменным состояния. С другой стороны, условие (3.42) определяет притягивающие свойства плоскости Z^* , т. е. для асимптотически устойчивой по части переменных системы множество Z^* является многомерным аттрактором (см. 2.1.3).

Введенные понятия иллюстрируются следующими примерами.

Пример 3.12. Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = x_1 + \lambda x_2 \quad (3.43)$$

с точечным положением равновесия $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Очевидно, что при любых λ система имеет частичное положение равновесия $x_1 = 0$ и глобально асимптотически устойчива по переменной x_1 (рис. 3.11). \square

Пример 3.13. Рассмотрим нелинейную систему

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad (3.44)$$

определенную в \mathbb{R}^2 , с точечным равновесным состоянием (здесь не единственным) $(0, 0)$ и частичным положением равновесия $x_1 = 0$. Интегральные кривые системы представлены на рис. 3.12, а и показывают, что система асимптотически устойчива по переменной x_1 с областью притяжения \mathcal{E}^0 . Отметим отсутствие свойства глобальной устойчивости системы, так как в \mathbb{R}^2 система не является полной — траектории в выделенной на графике области (вне множества \mathcal{E}^0) определены только на конечном интервале времени. \square

Следует обратить внимание на тот факт, что глобально асимптотически устойчивая по x_1 система (3.43) при $\lambda > 0$ в классическом смысле неустойчива (рис. 3.11, б), а система (3.44) только устойчива по Ляпунову. (рис. 3.12, а).

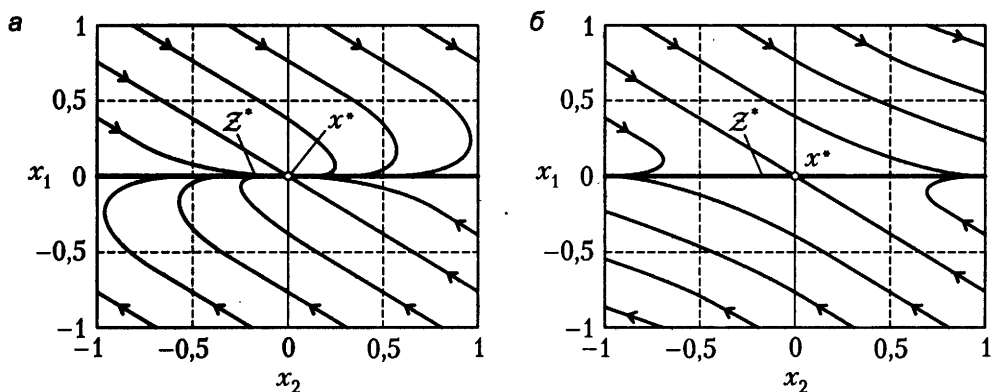


Рис. 3.11. Частичная асимптотическая устойчивость линейной системы (пример 3.12):
а) при $\lambda = -1$; б) при $\lambda = 1$

Пример 3.14. Линейная система

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = x_1 + 1. \quad (3.45)$$

не имеет точечных положений равновесия, однако удовлетворяет в \mathbb{R}^2 условиям непрерывности и аттрактивности по переменной x_1 (рис. 3.12, б) и, следовательно, также относится к частично асимптотически устойчивым системам. \square

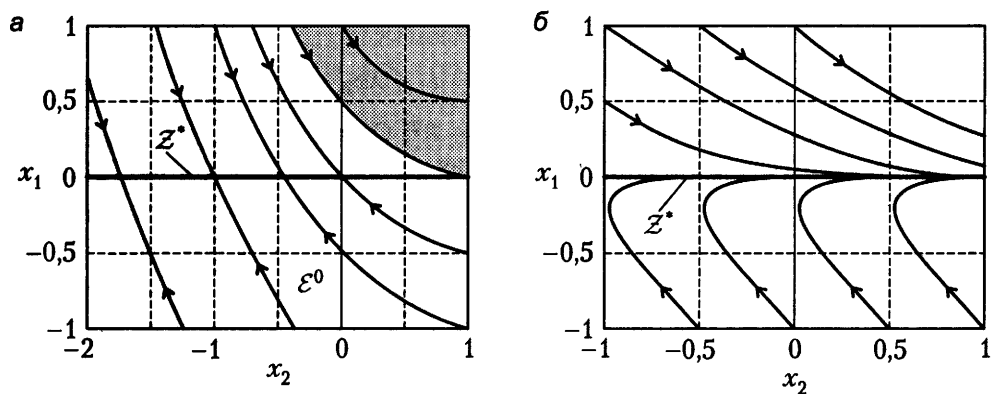


Рис. 3.12. Частичная асимптотическая устойчивость:
а) нелинейной системы (пример 3.13); б) линейной системы (пример 3.14)

Достаточные условия устойчивости по части переменных состояния были получены В. В. Румянцевым (см. [26]). Пусть положением равновесия системы (3.37)–(3.38) является точка $\xi = 0$. Введем в рассмотрение гладкую функцию $V(x)$, производная которой $\dot{V}(x)$ вычисляется в соответствии с выражением (3.17), и положительно определенные функции $w_1(\xi)$, $w_2(\xi)$, $w_3(\xi)$.

Теорема 3.9. Система (3.37)–(3.38) устойчива в равновесном состоянии $\xi = 0$, если в некоторой окрестности $\mathcal{E}(\mathcal{Z}^*)$ существует функция Ляпунова $V(x)$ такая, что

$$V(x) \geq w_1(\xi), \quad \dot{V}(x) \leq 0.$$

Если, кроме того,

$$V(x) \leq w_2(\xi), \quad \dot{V}(x) \leq -w_3(\xi),$$

то система асимптотически устойчива по ξ .

Если, кроме того, $\mathcal{X} = \mathcal{E}(\mathcal{Z}^*) = \mathbb{R}^n$ и функция $w_1(\xi)$ неограниченно возрастающая, то система глобально асимптотически устойчива по ξ .

Заметим, что в задачах устойчивости по части переменных, а также и более общих задачах частичной устойчивости (см. теорему 3.10 и пример 3.19) используются неотрицательные функции Ляпунова типа «желоб» (см. пример 3.8 и рис. 3.7).

3.2.2. Частичная устойчивость (устойчивость по функции)

Введенные выше понятия обобщаются на случай, когда система описывается уравнениями (3.34)–(3.35). Рассмотрим точку $\xi^* \in \Xi$ и множество \mathcal{Z}^* , для которого $\xi = \xi^*$, т. е. гиперповерхность

$$\mathcal{Z}^* = \{x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n : \phi(x) = \xi^*\}.$$

Для определенности положим, что для любых $x \in \mathcal{Z}^*$ выполняется

$$\text{rang } \phi(x) = \rho,$$

и следовательно, \mathcal{Z}^* является регулярной гиперповерхностью размерности $\nu = n - \rho$.

Дадим следующее определение.

Определение 3.9. Точка $\xi^* \in \Xi$ называется (*частичным*) *положением равновесия* системы (3.34)–(3.35), когда для всех $x_0 \in \mathcal{Z}^*$ решения (3.36) удовлетворяют условию

$$\xi(t, x_0) \equiv \xi^*. \quad (3.46)$$

Так как множество \mathcal{Z}^* представлено точками, для которых $\xi = \xi^*$, то любая траектория системы, лежащая на этом множестве, соответствует тождеству (3.46) (рис. 3.13). Следовательно, ξ^* — частичное положение равновесия тогда и только тогда, когда для начальных значений $x_0 \in \mathcal{Z}^*$ траектории $x(t, x_0)$ системы (3.34)

целиком принадлежат множеству Z^* . В частном случае, когда $\rho = n$ и отображение (3.35) обратимо, точка ξ^* соответствует равновесному состоянию основной системы $x^* = \phi^{-1}(\xi^*)$. Однако в общем случае многомерное множество Z^* (как и рассмотренная в 3.3.1 плоскость) может вообще не содержать точечных положений равновесия x^* (см. примеры 3.15–3.16).

Таким образом, определение 3.9, вообще говоря, не требует, чтобы система (3.34) имела точечные равновесные состояния, но предполагает существование нетривиальных инвариантных множеств, получивших название множеств нуль-динамики.

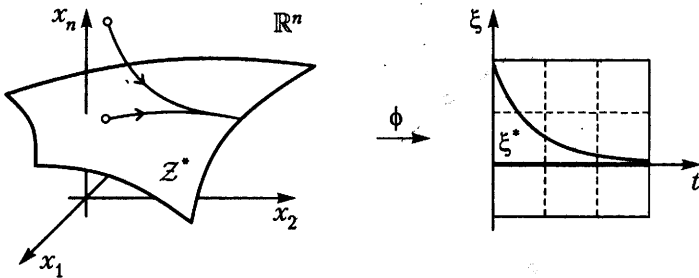


Рис. 3.13. Множество нуль-динамики

Определение 3.10. Наибольшее инвариантное множество (гиперповерхность) Z^* системы (3.34), для которого выполняется тождество (3.46), называется *множеством нуль-динамики* системы (3.34)–(3.35).

Понятие множества нуль-динамики становится особенно наглядным в случае, когда $\xi^* = 0$. Действительно, любое движение системы $x(t)$, происходящее в пределах этого множества, порождает нулевое значение переменной ξ (см. рис. 3.13–3.16).

Критерий частичного равновесия системы аналогичен критерию инвариантности множества Z^* (см. 2.1.3 и рис. 2.7, а) и получается из условия $\dot{\xi} = \dot{\phi}(x) = 0$. После дифференцирования сложной функции $\phi(x(t))$ и подстановки (3.34) получаем

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) \right|_{x \in Z^*} = 0. \quad (3.47)$$

Пример 3.15. Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a_1 x_1 - a_2 x_2, \quad (3.48)$$

где $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ (см. также примеры 2.9 и 2.10). Система имеет точечное равновесное состояние $(0, 0)$. Пусть выход системы определяется выражением

$$y = x_1. \quad (3.49)$$

Рассмотрим значение $y = x_1 = 0$ и множество (прямую) $Z^* : x_1 = 0$. Критерий (3.47) приводит к выражению $x_2 = 0$, которое не выполняется для произвольных $(x_1, x_2) \in Z^*$, т. е. решение $y = 0$ не может быть частичным положением равновесия (см. рис. 3.14, а).

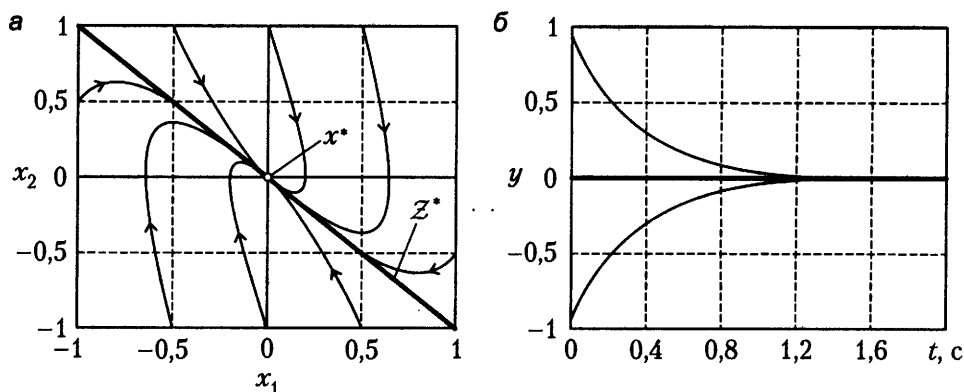


Рис. 3.14. Устойчивость по функции (выходной переменной y , пример 3.15)

Пусть для той же системы выход определяется выражением

$$y = \lambda x_1 - x_2, \quad (3.50)$$

где λ — вещественное число, удовлетворяющее уравнению

$$\lambda^2 + a_2\lambda + a_1 = 0, \quad (3.51)$$

т. е. полюс системы. Рассмотрим значение $y = 0$ и прямую $Z^* : -\lambda_1 x_1 + x_2 = 0$. Критерий (3.47) приводит к выражению

$$|\lambda - 1| \begin{vmatrix} x_2 \\ -a_1 x_1 - a_2 x_2 \end{vmatrix} = 0,$$

которое после подстановки $\lambda_1 x_1 - x_2 = 0$ принимает вид

$$(\lambda^2 + a_2\lambda + a_1)x_1 = 0.$$

Последнее всегда справедливо в силу условия (3.51), и следовательно, $y = 0$ является частичным положением равновесия, а прямая Z^* — инвариантным множеством системы (рис. 3.14).

Отметим, что множество Z^* является одним из собственных подпространств системы (3.48) (см. пример 2.10), инвариантность которого очевидна. \square

Пример 3.16. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1), \quad \dot{x}_2 = -3(f_1(x_1) + 2x_1)x_1^2 - 6x_2, \quad (3.52)$$

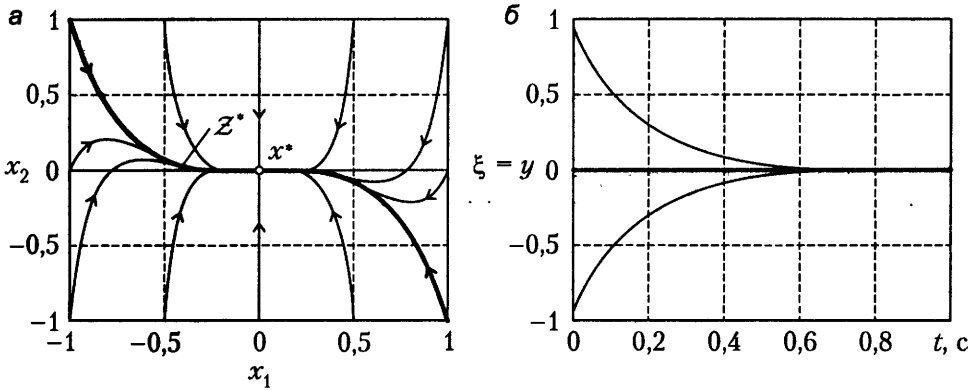


Рис. 3.15. Устойчивость по функции (выходной переменной y , пример 3.16), устойчивое равновесное состояние x^*

$$y = x_1^3 + x_2. \quad (3.53)$$

Решения системы находятся как

$$y(t) = (x_{10}^3 + x_{20})e^{-6t}. \quad (3.54)$$

Точка $y = 0$ — выходное положение равновесия, которое соответствует инвариантному множеству (кривой)

$$\mathcal{Z}^* : x_1^3 + x_2 = 0.$$

Множество содержит одно равновесное состояние системы $x^* = 0$, если, например, $f_1(x_1) = -x_1$ (рис. 3.15) или $f_1(x_1) = x_1$ (рис. 3.16). В случае когда $f_1 = 0$, все точки кривой \mathcal{Z}^* являются равновесными, а если $f_1 = \text{const} \neq 0$, система (3.52) вообще не имеет равновесных состояний. \square

Определим окрестность поверхности \mathcal{Z}^* как односвязное открытое множество $\mathcal{E}(\mathcal{Z}^*) \subset \mathcal{X}$, содержащее \mathcal{Z}^* , и дадим следующие определения.

Определение 3.11. Система (3.34)–(3.35) в положении равновесия $\xi = \xi^*$ называется

частично устойчивой (по функции ξ), если отображение $x_0 \mapsto \xi(t, x_0)$, $t > 0$, непрерывно во всех точках $x_0 \in \mathcal{Z}^*$;

частично асимптотически устойчивой (по функции ξ), если, кроме того, найдется окрестность $\mathcal{E}^0(\mathcal{Z}^*)$ (область притяжения) такая, что для всех $x_0 \in \mathcal{E}^0(\mathcal{Z}^*)$ выполняется условие частичной аттрактивности

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t, x_0) = \xi^*; \quad (3.55)$$

глобально частично асимптотически устойчивой (по функции ξ), если $\mathcal{X} = \mathcal{E}^0(\mathcal{Z}^*) = \mathbb{R}^n$, т. е. условие аттрактивности (3.55) выполняется для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

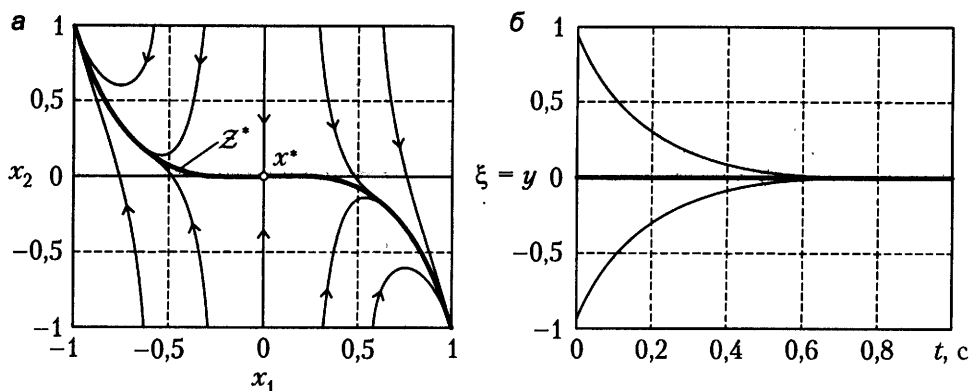


Рис. 3.16. Устойчивость по функции (выходной переменной y , пример 3.16), неустойчивое равновесное состояние x^*

Пример 3.17. Рассмотрим линейную систему (3.48), (3.50) с частичным положением равновесия $y = 0$ (пример 3.15). Система глобально частично асимптотически устойчива (рис. 3.14). При этом в зависимости от значения второго собственного числа система (3.48) может оказаться как асимптотически устойчивой, так и неустойчивой относительно точечного равновесного состояния $(0,0)$, однако во всех случаях траектории системы притягиваются к множеству \mathcal{Z}^* . \square

Пример 3.18. Анализ решения (3.54) свидетельствует о том, что система (3.52)–(3.53) (пример 3.16) асимптотически устойчива по функции y . При этом область притяжения является все пространство \mathbb{R}^2 , что позволяет сделать вывод о глобальной частичной асимптотической устойчивости. Это подтверждают и графики, приведенные на рис. 3.15 и 3.16, где все траектории притягиваются к множеству \mathcal{Z}^* . \square

Замечание 3.3. Как и в случае устойчивости по части переменных (см. замечание 3.7), понятия устойчивости по функции не предполагают устойчивости системы (3.34) по переменным состояниям, а скорее связаны с аттрактивностью поверхности \mathcal{Z}^* . Так, для глобально асимптотически устойчивой по выходу системы (3.43)–(3.44) при $f_1(0) = 0$ точка $(x_1, x_2) = (0,0) \in \mathcal{Z}^*$ является устойчивым равновесным состоянием, если модель $\dot{x}_1 = f_1(x_1)$ асимптотически устойчива (см. рис. 3.15), и неустойчивым состоянием в противном случае (см. рис. 3.16).

С другой стороны, если $f_1(x_1) = \alpha x_1$, где α — произвольное число, то несмотря на возможную неустойчивость равновесного состояния все траектории системы притягиваются к кривой \mathcal{Z} . \square

Инвариантное множество \mathcal{Z}^* частично асимптотически устойчивой системы часто является притягивающим множеством (аттрактором, см. 2.1.3).

Для исследования частичной устойчивости системы (3.34)–(3.35) можно восполь-

зоваться следующим результатом, обобщающим условия теоремы 3.3 (доказательство см. в [22, 26]).

Пусть $\xi^* = 0$, и $w_1(\xi)$, $w_2(\xi)$, $w_3(\xi)$ — положительно определенные функции.

Теорема 3.10. Система (3.34)–(3.35) в положении равновесия $\xi = 0$ частично устойчива, если в окрестности $\mathcal{E}(\mathcal{Z}^*)$ существует функция Ляпунова $V(x)$ такая, что

$$V(x) \geq w_1(\xi), \quad \dot{V}(x) \leq 0.$$

Если, кроме того,

$$V(x) \leq w_2(\xi), \quad \dot{V}(x) \leq -w_3(\xi),$$

то система частично асимптотически устойчива.

Если, кроме того, $\mathcal{X} = \mathcal{E}(\mathcal{Z}^*) = \mathbb{R}^n$ и функция $w_1(\xi)$ неограниченно возрастающая, то система глобально частично асимптотически устойчива.

Пример 3.19. Проанализируем устойчивость системы (3.52)–(3.53), имеющей частичное положение равновесия $y = 0$ (см. примеры 3.16 и 3.18). Выберем функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2}(x_1^3 + x_2)^2 = \frac{1}{2}y^2,$$

производная которой на решениях системы определяется как

$$\dot{V} = -6(x_1^3 + x_2)^2$$

и, следовательно, при $y = (x_1^3 + x_2) \neq 0$ строго отрицательна. Принимая также во внимание, что система (3.52) определена в \mathbb{R}^2 , с помощью теоремы 3.10 устанавливаем, что она глобально асимптотически устойчива по функции (выходной переменной) y . \square

3.2.3. Устойчивость по выходу

Понятие частичной устойчивости приобретает особое значение при исследовании свойств динамических систем по отношению к выходным переменным.

Напомним, что в линейном случае понятия устойчивости по выходной переменной (так называемая *техническая устойчивость* [24]) и устойчивости по всем переменным состояния эквивалентны при условии полной наблюдаемости системы. Аналогичное утверждение может быть сформулировано и для нелинейных систем. Тем не менее в целом ряде случаев устойчивость по всем переменным состояния не требуется или даже противоречит условиям решаемой задачи управления. Последнее касается в частности задач стабилизации энергии подвижных объектов [26, 40], согласованного управления, синхронизации колебательных процессов и орбитальной устойчивости (см. п. 5.1). Здесь объект управления должен находиться в движении, а некоторая выходная (регулируемая) переменная — оставаться

неизменной, что и приводит к необходимости рассмотрения вопроса устойчивости системы по указанной переменной.

С другой стороны, ослабление требований к свойствам проектируемой системы часто позволяет упростить структуру регулятора, что особенно важно для нелинейных систем, когда решение стандартной задачи стабилизации может оказаться трудно реализуемым или вообще невозможным.

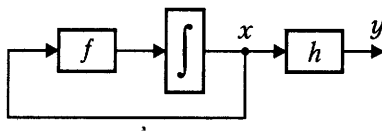


Рис. 3.17. Система с выходом y

Будем исследовать свойства динамической системы

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.56)$$

с выходом

$$y = h(x) \quad (3.57)$$

(см. рис. 3.17 и примеры 3.15–3.19). Пусть $\mathcal{Y} = h(\mathcal{X})$, $y \in \mathcal{Y}$ — скалярная выходная переменная, а функция h — гладкая в \mathcal{X} . Будем рассматривать решения

$$y(t) = y(t, x_0) = h(x(t, x_0)), \quad t \geq 0$$

относительно выходного положения равновесия $y^* \in \mathcal{Y}$. При этом полагаем, что для значений $x \in \mathcal{X}$ таких, что $h(x) = y^*$, выполняется условие регулярности

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x} \neq 0.$$

Концепция устойчивости по выходу несколько отличается от концепции частичной устойчивости (см. определение 3.10), что обусловлено различиями соответствующих понятий *положения равновесия*. Дело в том, что из условия $y(0, x_0) = y^*$ не всегда следует $y(t, x_0) \equiv y^*$, несмотря на то что для определенных начальных значений x_0 последнее тождество оказывается справедливым. Иными словами, множество (поверхность) $h(x) = 0$ в общем случае не является инвариантным множеством системы, а только *содержит* некоторое инвариантное множество меньшей размерности \mathcal{Z}^* , движение в котором и обеспечивает получение постоянного выходного сигнала $y(t, x_0) \equiv y^*$. Необходимость нахождения этого инвариантного множества и является основной особенностью задачи анализа устойчивости по выходу.

Введем в рассмотрение ρ -мерный вектор

$$\xi = H(x), \quad (3.58)$$

где

$$H = \{H_j\} = \{\mathcal{L}_f^{i-1} h\}, \quad i = 1, 2, \dots, \rho, \quad (3.59)$$

$0 < \rho \leq n$, а $\mathcal{L}_f^i h$ — производные Ли функции $h(x)$ по направлению векторного поля $f(x)$ (см. 1.1.3). Нетрудно получить, что в этом случае

$$\xi = (y, \dot{y}, \dots, y^{(\rho-1)}). \quad (3.60)$$

Рассмотрим точку

$$\xi^* = (y^*, 0, \dots, 0)$$

и множество (гиперповерхность) пространства \mathbb{R}^n

$$\mathcal{Z}^* = \{x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n : H(x) = \xi^*\}.$$

Будем полагать, что \mathcal{Z}^* является регулярной гиперповерхностью размерности $\nu = n - \rho$, т. е. для любых $x \in \mathcal{Z}^*$ выполняется:

$$\text{rank } H(x) = \rho.$$

Тогда из условия $x(t) \in \mathcal{Z}^*$ следует, что $\xi(t) \equiv \xi^*$, т. е. точка $\xi^* \in \Xi$ является частичным положением равновесия системы (3.56), (3.58) (см. определение 3.9), а поверхность \mathcal{Z}^* — инвариантной поверхностью системы (см. определение 2.5). Более того, так как в силу определения $H(x)$ имеет место (3.60), то при $\xi(t) \equiv \xi^*$ имеет место тождество $y \equiv y^*$, определяющее равновесие системы (3.56)–(3.57) по выходу y . Условием возникновения такого равновесного режима является существование поверхности \mathcal{Z}^* и определенный выбор начальных условий: $x_0 \in \mathcal{Z}^*$.

Определение 3.12. Точка $y = y^*$ называется *выходным положением равновесия* системы (3.56)–(3.57), если найдется множество $\mathcal{Z}^* \subset \mathcal{X}$ такое, что для всех $x_0 \in \mathcal{Z}^*$ решения системы удовлетворяют условию

$$y(t, x_0) \equiv y^*.$$

Напомним, что множество \mathcal{Z}^* системы (3.56), на котором траектории системы порождают нулевое или постоянное значение выходной переменной (рис. 3.13), называется множеством нуль-динамики (см. определение 3.10). Как следует из определения 3.12, существование множества нуль-динамики обеспечивает и существование равновесного состояния системы по выходу: $y(t, x_0) \equiv y^*$. В случае когда $\rho = n$, множество вырождается в точку x^* — равновесное состояние системы (3.56), а при $\rho = 1$ имеет место полное совпадение понятий частичного положения равновесия и положения равновесия по выходной переменной, а следовательно, и соответствующих концепций устойчивости.

Введем основные понятия устойчивости по выходу, близкие по формулировкам к введенным ранее определениям частичной устойчивости.

Определение 3.13. Система (3.56)–(3.57) в положении равновесия $y = y^*$ называется

устойчивой по выходной переменной y , если отображение $x_0 \mapsto y(t, x_0)$, где $t \geq 0$, непрерывно во всех точках $x_0 \in Z^*$;

асимптотически устойчивой по y , если, кроме того, найдется окрестность $\mathcal{E}^0(Z^*)$ (область притяжения) такая, что для всех $x_0 \in \mathcal{E}^0(Z^*)$ выполняется условие аттрактивности по y , т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^*; \quad (3.61)$$

глобально (в целом) асимптотически устойчивой по y , если $\mathcal{X} = \mathcal{E}^0(Z^*) = \mathbb{R}^n$, т. е. условие аттрактивности (3.61) выполняется для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Для проверки свойств устойчивости по выходной переменной может быть непосредственно использована теорема 3.10. Единственной особенностью ее применения является необходимость нахождения (по рассмотренной выше схеме) функции $H(x)$ и множества нулевой динамики Z^* .

Примером нелинейной системы, глобально асимптотически устойчивой по выходу, является рассмотренная ранее система (3.52) (см. пример 3.16 и рис. 3.15–3.16).

3.3. Пассивность и устойчивость по входу

Наиболее распространенные понятия и методы теории устойчивости относятся к *автономным* динамическим системам. В то же время в большинстве практических приложений представляет интерес поведение системы под действием входных сигналов — внешних возмущений определенного класса. В этом параграфе изучаются так называемые *пассивные* системы, обладающие ограниченной чувствительностью к аддитивным входным (возмущающим) воздействиям, а также свойство устойчивости системы по входу.

3.3.1. Пассивные системы

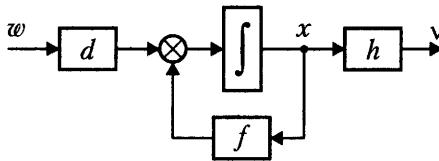


Рис. 3.18. Возмущенная система

Будем рассматривать глобальное поведение возмущенной системы (рис. 3.18)

$$\dot{x} = f(x) + d(x)w, \quad (3.62)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $w = w(t)$ — скалярный входной сигнал (возмущающее воздействие), $t \geq 0$, а вектор-функция $d(x)$ для любых x ограничена:

$$|d(x)| \leq \Delta_w. \quad (3.63)$$

Сформируем скалярный выход $v(t)$:

$$v = h(x) \quad (3.64)$$

и определим показатель Попова (см. 1.2.1) системы (3.62), (3.64)

$$\eta(t) = 2 \int_0^t v(\tau) w(\tau) d\tau. \quad (3.65)$$

Определение 3.14. Система (3.62), (3.64) называется *пассивной*, если для любых $w = w(t)$ и $t \geq 0$ существуют скалярные функции

$$V(x) \geq 0 \text{ и } W(x) \geq 0$$

такие, что выполняется *условие пассивности*

$$\eta(t) = V(x) \Big|_{x_0}^{x(t)} + \int_0^t W(x) d\tau. \quad (3.66)$$

Условие пассивности может быть также записано в дифференциальной форме:

$$\dot{V}(x) = -W(x) + 2vw. \quad (3.67)$$

Функция $V(x)$ в определении 3.14 (как и функция Ляпунова, см. 3.1.3) характеризует запасенную энергию системы и называется *функцией запаса*, а функция в правой части неравенства (3.67), характеризующая скорость изменения $V(x)$, — *функцией расхода*. В отсутствие входного сигнала ($w = 0$) из выражения (3.67) получаем, что

$$\dot{V}(x) \leq 0,$$

т. е. энергия пассивной системы не возрастает. Естественно, что увеличение энергии может происходить благодаря ненулевому входному воздействию $w(t)$, а не за счет внутренних источников, чем и объясняется термин *пассивная система*.

Замечание 3.4. Пассивные системы обладают свойством положительности (см. 1.2.1), т. е. удовлетворяют неравенству Попова

$$\eta(t) \geq -V_0,$$

где $V_0 = V(0) \geq 0$.

□

Определение 3.15. Пассивная система (3.62), (3.64) называется *строго пассивной*, если $W(x)$ — возрастающая функция и

$$W(x) > 0.$$

Как следует из определения 3.15, основной особенностью *строго* пассивной системы является знакоопределенность функции $W(x)$. При этом функция запаса приобретает сходство с функцией Ляпунова асимптотически устойчивой системы. Действительно, в отсутствие входного сигнала ($w = 0$) неравенство (3.67) принимает вид

$$\dot{V}(x) = -W(x) < 0. \quad (3.68)$$

Если, кроме того, функция запаса $V(x)$ положительно определена и неограниченно возрастает (с ростом $|x|$), то по теореме 3.7 (см. также замечание 3.2а) система (3.62) глобально асимптотически устойчива. Таким образом,

строго пассивная система (3.62), (3.64) с возрастающей положительно определенной функцией запаса $V(x)$ в отсутствие входного воздействия глобально асимптотически устойчива в точке $x = 0$.

При определенных условиях имеет место и обратное утверждение. Найдем производную функции запаса $V(x)$ на решениях системы (3.62):

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} d(x)w. \quad (3.69)$$

Обозначим

$$W(x) = -\frac{\partial V}{\partial x} f(x), \quad (3.70)$$

а функцию $h(x)$ в уравнении выхода (3.64) выберем как

$$h(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} d(x). \quad (3.71)$$

При этом уравнение (3.69) принимает вид (3.67), что является условием строгой пассивности, если $V(x) \geq 0$, а $W(x)$ — возрастающая положительно определенная функция (определение 3.15).

Пусть при $w \equiv 0$ система (3.62) глобально (равномерно) асимптотически устойчива. Тогда (см. теорему 3.7 и замечание 3.2а) существует функция $V(x) > 0$ и возрастающая функция $W(x) > 0$, т. е. возмущенная система (3.62) является строго пассивной. Таким образом,

глобально (равномерно) асимптотически устойчивая система (3.62) с выходом (3.64) строго пассивна с функцией запаса $V(x) > 0$, если функция $h(x)$ удовлетворяет условию (3.71).

Рассмотрим линейную возмущенную систему

$$\dot{x} = Ax + dw, \quad (3.72)$$

которая может быть получена в результате линеаризации гладкой нелинейной системы (см. 3.1.2). Введем в рассмотрение квадратичную функцию запаса

$$V(x) = x^T P x, \quad (3.73)$$

где матрица $P = P^T$ является решением уравнения Ляпунова:

$$A^T P + P A = -Q, \quad (3.74)$$

$Q = Q^T \geq 0$. Сформируем выходную переменную системы в соответствии с условием (3.71), т. е.

$$v = c^T x, \quad (3.75)$$

где матрица-строка c^T находится как

$$c^T = d^T P. \quad (3.76)$$

Проанализируем показатель Попова (3.65). С учетом выражений (3.74) и (3.76) получим

$$\dot{V} = -x^T Q x + 2vw \quad (3.77)$$

или, после интегрирования, — выражение

$$\eta(t) = x^T P x \Big|_{x_0}^{x(t)} + \int_0^t x^T Q x \, d\tau, \quad (3.78)$$

где $W(x) = x^T Q x \geq 0$. Если в результате решения уравнения (3.74) найдется матрица $P \geq 0$, то $V(x) = x^T P x \geq 0$, и рассматриваемая система является пассивной (определение 3.14).

Выберем $Q > 0$, и следовательно, $W(x) = x^T Q x > 0$. Тогда необходимым и достаточным условием строгой пассивности рассматриваемой системы (см. определение 3.15) является существование решения $P \geq 0$.

Если система (3.72) асимптотически устойчива, т. е. матрица A гурвицева: $\operatorname{Re} \lambda_i \{A\} < 0$, то в соответствии с леммой Ляпунова (см. 3.1.4) результатом решения уравнения (3.74) будет $P > 0$. Такая система с очевидностью является строго пассивной. С другой стороны, если система строго пассивна и $P > 0$, то по лемме Ляпунова она асимптотически устойчива.

Замечание 3.5. Существование положительно определенной матрицы P , удовлетворяющей уравнениям (3.74) и (3.76), где $Q > 0$, позволяет сделать вывод, что передаточная функция системы (3.72), (3.75)

$$W(s) = c^T (sI - A)^{-1} b$$

является строго вещественно-положительной, т. е.

$$\operatorname{Re} W(s) > 0 \text{ при } \operatorname{Re} s \geq 0$$

(см. также лемму Якубовича–Калмана, [26, 31]). Последнее свойство подразумевает следующее:

а) относительная степень системы (разность порядков знаменателя и числителя) равна 1;

б) система (3.74) является асимптотически устойчивой:

$$\operatorname{Re} \lambda_i \{A\} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

т. е. полюсы передаточной функции $W(s)$ лежат в левой полуплоскости;

в)

$$\operatorname{Re} W(j\omega) > 0 \text{ при } \omega \geq 0,$$

т. е. годограф частотной передаточной функции $W(j\omega)$ (АФЧХ) для любых значений $\omega \geq 0$ лежит в правой полуплоскости комплексной плоскости.

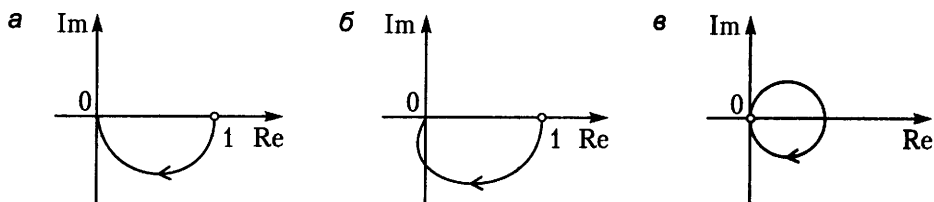


Рис. 3.19. Годографы $W(j\omega)$ и понятие вещественно-положительности

На рис. 3.19, а приведен годограф строго вещественно-положительной передаточной функции

$$W(s) = \frac{2s + 3}{s^2 + 4s + 3},$$

а на рис. 3.19, б и 3.19, в представлены годографы передаточных функций

$$W(s) = \frac{3}{s^2 + 4s + 3}$$

и

$$W(s) = \frac{2s}{s^2 + 4s + 3},$$

которые не удовлетворяют условию вещественно-положительности.

3.3.2. Устойчивость по входу

Понятие устойчивости по входному воздействию определяется свойством системы обеспечивать ограниченное изменение переменных состояния при ограниченных сигналах на ее входе. Устойчивость по входу связана как со свойством пассивности, так и со свойством асимптотической устойчивости системы. Однако если для линейных систем из асимптотической устойчивости автономной системы безусловно следует ограниченность переменных состояния при ограниченных входных воздействиях (см. ниже), то для нелинейных систем это заключение, вообще говоря, несправедливо.

Пример 3.20. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -x + 5 (\cos x) w. \quad (3.79)$$

Очевидно, что при $w = 0$ система асимптотически устойчива. При ограниченных воздействиях $w(t)$ переменная x также является ограниченной, что иллюстрируется рис. 3.20, а. \square

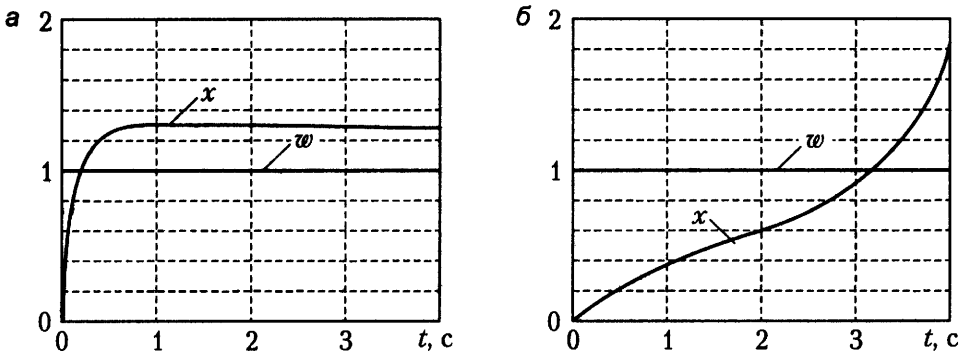


Рис. 3.20. Устойчивое (а) и неустойчивое (б) поведение возмущенной системы

Пример 3.21. Теперь рассмотрим систему

$$\dot{x} = -x + (0.5 + x^2) w, \quad (3.80)$$

которая также асимптотически устойчива при $w = 0$. Однако ограниченные входные воздействия $w(t)$ вызывают неограниченное изменение переменной x , что иллюстрируется рис. 3.20, б. \square

Общее понятие устойчивости по входному воздействию устанавливается следующим образом.

Определение 3.16. Система (3.62) называется *устойчивой по входу*, если для входного сигнала $w(t) \in \mathcal{L}_p$ ($1 \leq p \leq \infty$) состояние системы удовлетворяет условию $|x(t)| \in \mathcal{L}_p$.

Таким образом, устойчивость по входу (или *устойчивость вход-состояние*) подразумевает получение ограниченного (в смысле данной функциональной нормы \mathcal{L}_p , см. 1.1.2) вектора состояния для ограниченного входного сигнала. В частных случаях имеется в виду интегральная ограниченность сигналов (\mathcal{L}_1) либо ограниченность абсолютных значений (\mathcal{L}_∞).

Устойчивость по входу тесно связана со свойствами пассивности и глобальной асимптотической устойчивости. Рассмотрим систему (3.62), (3.64), полагая, что функция $h(x)$ выбирается из условия (3.71), где $V(x)$ — функция запаса, а $W(x)$ определяется выражением (3.70). Пусть система (3.62) (в отсутствие входного воздействия w) глобально (равномерно) асимптотически устойчива, и следовательно, справедливо выражение (3.67), где $V(x) > 0$ и $W(x) > 0$, что обеспечивает строгую пассивность рассматриваемой системы (см. определение 3.15). Определим число $\alpha_0 > 0$ такое, что

$$W(x) \geq 2 \alpha_0 V(x),$$

и из выражения (3.67) получим неравенство

$$\dot{V} + 2\alpha_0 V \leq 2h(x) w. \quad (3.81)$$

Допустим, что найдется число $\beta \geq 0$ такое, что

$$h(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} d(x) \leq \beta |x|. \quad (3.82)$$

Тогда неравенство (3.81) примет вид

$$\dot{V} + 2\alpha_0 V \leq 2\beta |x| |w|. \quad (3.83)$$

Из последнего выражения при условии, что $V(x)$ неограниченно возрастает, найдем

$$\frac{d}{dt} |x| + \alpha_0 |x| \leq \bar{\beta} |w|, \quad (3.84)$$

где $\bar{\beta} \geq 0$. Неравенство (3.84) показывает, что система (3.62), (3.64) является устойчивой по входу w (определение 3.16). Таким образом,

глобально (равномерно) асимптотически устойчивая система (3.62) с выходом (3.64) устойчива по входу w , если функция $h(x)$ удовлетворяет условию (3.82).

Рассмотрим асимптотически устойчивую линейную систему (3.72) с выходом (3.75), полагая, что $V(x) = x^T P x$, $W(x) = x^T Q x$, матрица P является решением матричного уравнения (3.74), а матрица c находится из выражения (3.76). При этом функция запаса $V(x)$ удовлетворяет уравнению (3.77).

Выберем $Q > 0$, что обеспечивает существование решения $P > 0$ и строгую пассивность системы. Найдем $\alpha_0 > 0$ такое, что

$$Q \geq 2 \alpha_0 P,$$

и перепишем выражение (3.77) в виде

$$\dot{V} + 2\alpha_0 V \leq 2vw = 2b^T P x w. \quad (3.85)$$

Из последнего выражения нетрудно получить неравенство

$$\frac{d}{dt}|x|_P + \alpha_0|x|_P \leq |b|_P |w|, \quad (3.86)$$

которое показывает, что система является устойчивой по входу w (определение 3.16).

Таким образом, асимптотически устойчивая *линейная* система всегда является устойчивой по входу.

Глава 4. Методы управления гладкими системами

Одним из важнейших инструментов анализа и синтеза нелинейных систем является преобразование координат, направленное на получение эквивалентных представлений динамической модели и позволяющее в целом ряде случаев решать нетривиальные задачи управления с помощью хорошо изученных методов линейной теории. В этой главе изучаются основные методы преобразования нелинейных систем, вводятся канонические формы, а также рассматриваются вопросы стабилизации и управления гладкими нелинейными системами различной структуры.

4.1. Эквивалентные формы, линеаризация и стабилизация состояния

Различного рода эквивалентные преобразования широко используются для анализа и синтеза как линейных, так и нелинейных динамических систем. Однако в отличие от теории линейных системы, где преобразование координат играет вспомогательную роль (является иллюстративным инструментом или служит для упрощения доказательств), в нелинейной теории без приведения системы к той или иной эквивалентной форме часто не удается получить аналитического решения многих проблем управления. Исключительную роль здесь играют нелинейные преобразования и приемы линеаризации, позволяющие получить линейные или подобные им эквивалентные модели, допускающие в дальнейшем возможность использования известных методов линейной теории.

В этом разделе приведены общие понятия эквивалентности нелинейных моделей *вход-состояние*, основные свойства эквивалентных моделей (полнота, устойчивость, управляемость), основные канонические формы, методы линеаризации — получения линейных (линеаризованных) моделей и, наконец, методы стабилизации нелинейных систем, основанные на использовании эквивалентных представ-

лений. Эквивалентные преобразования нелинейных моделей *вход-выход*, а также вопросы стабилизации систем по выходным переменным рассматриваются в п. 4.2.

4.1.1. Преобразование автономных систем

Сначала рассмотрим автономные динамические системы, первая из которых описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x), \quad (4.1)$$

где $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, а вторая —

$$\dot{\xi} = a(\xi), \quad (4.2)$$

где $\xi \in \Xi \subset \mathbb{R}^n$. Здесь f и a — гладкие вектор-функции, определенные на открытых множествах \mathcal{X} и Ξ соответственно. В силу гладкости систем (4.1) и (4.2) для любых начальных условий $x_0 \in \mathcal{X}$ и $\xi_0 \in \Xi$ уравнения (4.1) и (4.2) имеют единственные решения:

$$x(t) = x(t, x_0) \quad \text{и} \quad \xi(t) = \xi(t, \xi_0),$$

определенные на некотором временном интервале $[0, T)$, $T > 0$ (см. 2.2.1–2.2.2).

Введем в рассмотрение отображение $\mathcal{X} \mapsto \Xi$:

$$\xi = \phi(x). \quad (4.3)$$

Отметим, что данное отображение, с одной стороны, определяет связь систем координат двух множеств \mathcal{X} и Ξ , принадлежащих различным пространствам (*активная* точка зрения, рис. 4.1, а), а с другой — изменение (преобразование) системы координат единого пространства \mathbb{R}^n (*пассивная* точка зрения, рис. 4.1, б). Дадим следующие определения.

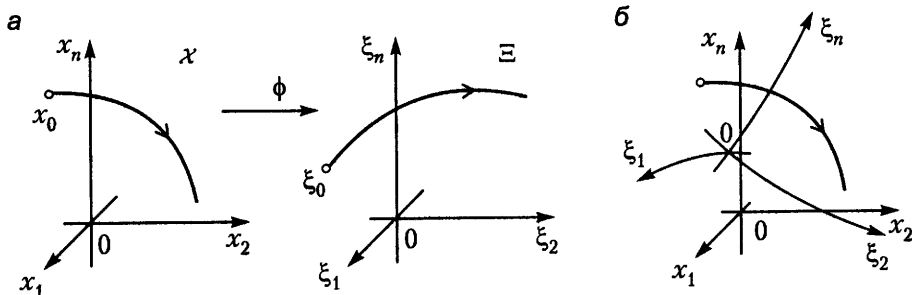


Рис. 4.1. Преобразование координат — активная (а) и пассивная (б) трактовки

Определение 4.1. Отображение (4.3) называется *регулярным преобразованием координат* системы (4.1) в области $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, если отображение (4.3) — диффеоморфизм $\mathcal{X} \mapsto \Xi$.

Напомним, что гладкое отображение (4.3) называется диффеоморфизмом, если оно взаимно однозначно, и обратное отображение $x = \phi^{-1}(\xi)$ также является гладким (см. 1.1.2). Локальный диффеоморфизм (в малой окрестности точки x^*) предполагает соблюдение рангового условия: $\text{rank } \phi(x^*) = n$, что означает, что для $x = x^*$ матрица Якоби отображения (4.3) не вырождена, т. е.

$$\det \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=x^*} \neq 0. \quad (4.4)$$

Определение 4.2. Системы (4.1) и (4.2) называются *эквивалентными* (в соответствующих областях определения), если найдется регулярное преобразование координат (4.3) такое, что для любых $x_0 \in \mathcal{X}$, $\xi_0 = \phi(x_0) \in \Xi$ и $t \in [0, T)$ выполняется

$$\xi(\xi_0, t) = \phi \circ x(x_0, t). \quad (4.5)$$

Системы (4.1) и (4.2) называются *глобально эквивалентными*, если $\mathcal{X} = \Xi = \mathbb{R}^n$ и системы эквивалентны во всем пространстве \mathbb{R}^n .

Замечание 4.1. Определения эквивалентности вводятся для ограниченного временного интервала $[0, T)$, что дает возможность изучать системы, не являющиеся полными, а также системы, свойства которых для любых моментов времени t заранее не известны (см. примеры 2.1–2.2 и рис. 4.2). □

Далее рассматриваются в основном *локальные* свойства нелинейной системы, т. е. ее свойства в достаточно малой окрестности $\mathcal{E}(x^*)$ точки $x^* \in \mathcal{X}$.

Пример 4.1. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -\frac{1}{x}, \quad (4.6)$$

заданную на множестве $x \in (0, \infty)$, с решениями (см. рис. 4.2, а)

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 - 2t}$$

и линейную систему

$$\dot{\xi} = -1,$$

определенную на множестве $\xi \in (0, \infty)$, с решениями

$$\xi(t) = \xi_0 - t.$$

Легко показать, что для любых $t \in [0, x_0^2/2)$ решения систем связаны соотношением

$$\xi = \frac{x^2}{2},$$

которое в рассматриваемых областях является диффеоморфизмом, и, следовательно, системы эквивалентны. Отметим, что первая система не является полной и поэтому эквивалентность имеет место лишь на ограниченном временном интервале. \square

Для вывода критерия эквивалентности автономных систем продифференцируем (4.3) по времени. Получим

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \dot{x},$$

и подставив (4.1) и (4.2), найдем

$$a(\xi) = \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x),$$

где $\xi = \phi(x)$. Таким образом, критерий формулируется следующим образом.

Теорема 4.1. Системы (4.1) и (4.2) эквивалентны тогда и только тогда, когда существует регулярное преобразование координат (4.3) такое, что для любой точки $x \in \mathcal{X}$ имеет место

$$a \circ \phi(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x),$$

т. е. векторные поля $f(x)$ и $a(\xi)$ ϕ -связаны.

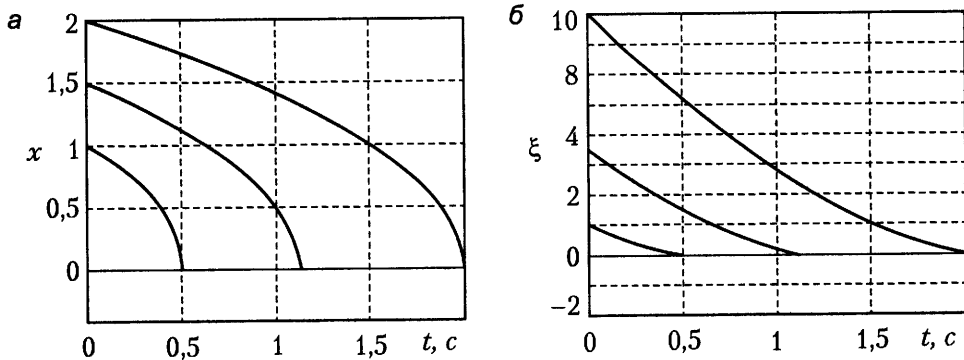


Рис. 4.2. Переходные процессы эквивалентных систем

Пример 4.2. Система

$$\dot{\xi} = -3\sqrt[3]{\xi},$$

определенная на множестве $\xi \in (0, \infty)$, эквивалентна системе (4.6) (решения приведены на рис. 4.2). Действительно, координаты систем связаны соотношением

$$\xi = x^3,$$

а правые части их моделей — соотношением

$$-3\sqrt[3]{\xi} \Big|_{\xi = x^3} = 3x^2 \left(-\frac{1}{x} \right).$$

Как и в примере 4.1, отметим, что эквивалентность имеет место на ограниченном временном интервале (см. рис. 4.2). □

Преобразования координат используются для нахождения специальных (*канонических*) форм представления нелинейной системы.

Наибольшее распространение получила следующая каноническая форма. Определим *вспомогательную выходную переменную*

$$y = \phi_1(x), \quad (4.7)$$

где ϕ_1 — гладкая функция, и применим процедуру *последовательного дифференцирования*.

Дифференцируя (4.7) по времени и подставляя уравнение системы (4.1), находим

$$\dot{y} = \phi_2(x), \quad (4.8)$$

где $\phi_2 = (\partial\phi_1/\partial x)f$. Дифференцируя (4.8) по времени, находим

$$\ddot{y} = \phi_3(x), \quad (4.9)$$

где $\phi_3 = (\partial\phi_2/\partial x)f$. На $n - 1$ шаге процедуры получаем

$$y^{(n-1)} = \phi_n(x), \quad (4.10)$$

где $\phi_n = (\partial\phi_{n-1}/\partial x)f$, а на n -м —

$$y^{(n)} = \frac{\partial\phi_n}{\partial x}f. \quad (4.11)$$

Последнее выражение и дает скалярную форму описания искомой канонической модели.

Для перехода к виду (4.2) введем в рассмотрение новые переменные состояния

$$\xi_1 = y, \quad \xi_2 = \dot{y}, \quad \dots, \quad \xi_{n-1} = y^{(n-2)}, \quad \xi_n = y^{(n-1)} \quad (4.12)$$

и функцию

$$\alpha(x) = \frac{\partial\phi_n}{\partial x}f. \quad (4.13)$$

Перепишем уравнения (4.8)–(4.11) в виде

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = \xi_3, \quad \dots, \quad \dot{\xi}_{n-1} = \xi_n, \quad \dot{\xi}_n = \bar{\alpha}(\xi), \quad (4.14)$$

где

$$\bar{\alpha} = \alpha \circ \phi^{-1}.$$

Для получения векторной формы определим *преобразованный вектор состояния*

$$\xi = \phi(x), \quad (4.15)$$

где

$$\phi(x) = \{\phi_i(x)\}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.16)$$

полагая, что функция $\phi_1(x)$ выбрана из условия регулярности преобразования (4.7), т. е. для любых $x \in \mathcal{X}$ выполняется условие (4.4) и существует обратное преобразование

$$x = \phi^{-1}(\xi). \quad (4.17)$$

Выражения (4.14) принимают вид:

$$\dot{\xi} = A_0 \xi + b_0 \bar{\alpha}(\xi), \quad (4.18)$$

где

$$A_0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}, \quad b_0 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}. \quad (4.19)$$

(рис. 4.3). По теореме 4.1 полученная модель эквивалентна исходной системе (4.1), если преобразование (4.15) удовлетворяет условию регулярности (4.4), что и определяет основное требование к выбору вспомогательного выхода (4.7).

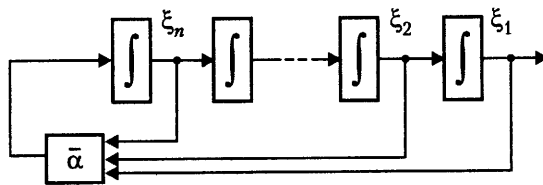


Рис. 4.3. Каноническая форма автономной системы

Замечание 4.2. Для автономной системы (4.1), используя формализм производных Ли (см. 1.1.3), можно записать

$$\dot{\phi}_1 = \mathcal{L}_f^0 \phi_1,$$

$$\dot{\phi}_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} f = \mathcal{L}_f^1 \phi_1,$$

$$\ddot{\phi}_1 = \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{L}_f^1 \phi_1) f = \mathcal{L}_f^1 \mathcal{L}_f^1 \phi_1 = \mathcal{L}_f^2 \phi_1,$$

и т. д. Таким образом, имеет место свойство

$$\phi_1^{(i)} = \mathcal{L}_f^i \phi_1, \quad (4.20)$$

позволяющее упростить выражения, использующиеся в процедуре последовательного дифференцирования и, в частности, записать

$$\phi_i(x) = \mathcal{L}_f^{i-1}\phi_1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.21)$$

$$\alpha(x) = \mathcal{L}_f^n\phi_1. \quad (4.22)$$

□

Эквивалентные системы обладают целым рядом идентичных свойств. Некоторые из них устанавливаются следующей теоремой.

Теорема 4.2. Пусть системы (4.1) и (4.2) эквивалентны. Тогда:

- 1) система (4.1) является полной на множестве \mathcal{X} тогда и только тогда, когда система (4.2) является полной на множестве Ξ ;
- 2) точка x^* является положением равновесия системы (4.1) тогда и только тогда, когда точка $\xi^* = \phi(x^*)$ — положение равновесия системы (4.2);
- 3) положение равновесия x^* системы (4.1) устойчиво (асимптотически устойчиво) тогда и только тогда, когда положение равновесия $\xi^* = \phi(x^*)$ системы (4.2) устойчиво (асимптотически устойчиво).

Таким образом, эквивалентные преобразования предоставляют возможность исследования свойств полноты и устойчивости основной системы на базе более простых эквивалентных моделей.

4.1.2. Преобразования объекта управления и канонические формы

Рассмотрим динамическую систему (объект управления), представленную моделью вход-состояние вида

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (4.23)$$

где $u = u(t)$ — скалярное управляющее (входное) воздействие (ограниченное на любом конечном интервале времени $[t_0, T)$, $T > t_0 \geq 0$); g — гладкое векторное поле на множестве \mathcal{X} . Тогда для любого значения t_0 и произвольного начального состояния $x_0 = x(t_0) \in \mathcal{X}$ существует единственное решение уравнения (4.23)

$$x = x(t, x_0, t_0),$$

определенное на некотором интервале $t \in [t_0, T)$ (см. 2.2.1–2.2.3).

Рассмотрим также систему

$$\dot{\xi} = a(\xi) + b(\xi)u, \quad (4.24)$$

где $\xi \in \Xi \subset \mathbb{R}^n$, b — векторное поле, гладкое на Ξ . Для любых t_0 и $\xi(t_0) = \xi_0 \in \Xi$ найдется решение уравнения (4.24)

$$\xi(t) = \xi(t, \xi_0, t_0),$$

определенное на некотором интервале времени. Понятие эквивалентности неавтономных систем практически повторяет определение 4.2, в котором тождество (4.5) заменяется выражением

$$\xi(t, \xi_0, t_0) = \phi \circ x(t, x_0, t_0), \quad t \in [t_0, T], \quad (4.25)$$

и поэтому можно предложить следующее обобщение критерия эквивалентности.

Теорема 4.3. Системы (4.23) и (4.24) эквивалентны тогда и только тогда, когда существует регулярное преобразование координат (4.3) такое, что для любых $x \in \mathcal{X}$ имеет место

$$a \circ \phi(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x), \quad b \circ \phi(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x} g(x), \quad (4.26)$$

т. е. векторные поля $f(x)$ и $a(\xi)$, а также $g(x)$ и $b(\xi)$ ϕ -связаны.

Эквивалентные преобразования рассматриваемого типа используются для нахождения специальных (канонических) форм представления нелинейных систем, а также для исследования свойств наблюдаемости и управляемости (см. 4.1.3). Определим матрицы

$$\begin{aligned} C_x(x) &= [\mathcal{L}_f^0 g \mid \mathcal{L}_f^1 g \mid \dots \mid \mathcal{L}_f^{n-1} g], \\ C_\xi(\xi) &= [\mathcal{L}_a^0 b \mid \mathcal{L}_a^1 b \mid \dots \mid \mathcal{L}_a^{n-1} b], \end{aligned}$$

которые называются *матрицами (локальной) управляемости*.

Теорема 4.4. Если системы (4.23) и (4.24) эквивалентны, то матрицы управляемости C_x и C_ξ для любых $x \in \mathcal{X}$ связаны соотношением

$$C_\xi \circ \phi(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x} C_x(x).$$

Теоремы 4.3 и 4.4 служат основанием для преобразования нелинейной системы к различным эквивалентным формам.

1-я каноническая форма имеет вид (рис. 4.4)

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = \xi_3, \quad \dots, \quad \dot{\xi}_n = \bar{\alpha}(\xi) + u, \quad (4.27)$$

где $\bar{\alpha}(\xi)$ — скалярная функция. Модель получается, если в уравнении (4.24) положить

$$a(\xi) = A_0 \xi + b_0 \bar{\alpha}(\xi),$$

где матрицы A_0 и b_0 определены выражениями (4.19). Нетрудно получить, что

$$C_\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & (-1)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & * \\ 1 & * & \dots & * \end{pmatrix},$$

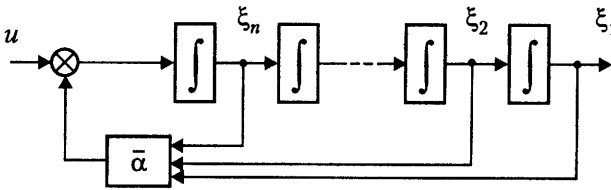


Рис. 4.4. Каноническая модель нелинейной системы (1-я форма)

причем матрица C_ξ с очевидностью не вырождена:

$$\det C_\xi \neq 0.$$

2-я каноническая форма получается, если в уравнении (4.24) положить

$$a(\xi) = A_0^T \xi + \bar{a}(\xi_n), \quad b(\xi) = b^0,$$

где $\bar{a} = \{\bar{a}_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) — векторная функция,

$$b^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Можно записать

$$\dot{\xi}_1 = \bar{a}_1(\xi_n) + u, \quad \dot{\xi}_2 = \xi_1 + \bar{a}_2(\xi_n), \quad \dots, \quad \dot{\xi}_n = \xi_{n-1} + \bar{a}_n(\xi_n),$$

что соответствует модели, представленной на рис. 4.5.

Нетрудно получить

$$C_\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (-1)^{n-1} \end{pmatrix},$$

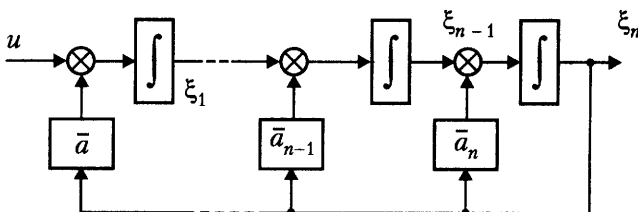


Рис. 4.5. Каноническая модель нелинейной системы (2-я форма)

причем матрица C_ξ не вырождена:

$$\det C_\xi \neq 0.$$

Отметим, что приведение ко 2-й канонической форме возможно лишь для достаточно ограниченного класса нелинейных моделей.

Наибольшее распространение получила так называемая *основная каноническая форма*, сходная с моделью (4.27). Для ее построения используется так называемое *основное преобразование*, которое заключается в последовательном дифференцировании уравнения выхода системы, т. е. аналогично процедуре, рассмотренной в 4.1.1.

Определим *вспомогательную выходную переменную*

$$y = \phi_1(x), \quad (4.28)$$

где ϕ_1 — гладкая функция, а также функции

$$\phi_i = \frac{\partial \phi_{i-1}}{\partial x} f, \quad i = 2, \dots, n. \quad (4.29)$$

Функцию $\phi_1(x)$ выберем так, чтобы для любых $x \in \mathcal{X}$ выполнялось:

а)
$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} g = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad (4.30)$$

б)
$$\frac{\partial \phi_n}{\partial x} g \neq 0. \quad (4.31)$$

Теперь в силу условий (4.30) получим выражения (4.8)–(4.10) и

$$y^{(n)} = \frac{\partial \phi_n}{\partial x} f + \frac{\partial \phi_n}{\partial x} g u. \quad (4.32)$$

Последнее уравнение и дает скалярную форму описания искомой канонической модели. Для перехода к форме Коши и далее к виду (4.24) введем в рассмотрение новые переменные состояния

$$\xi_1 = y, \quad \xi_2 = \dot{y}, \quad \dots, \quad \xi_{n-1} = y^{(n-2)}, \quad \xi_n = y^{(n-1)} \quad (4.33)$$

и преобразованный вектор состояния

$$\xi = \phi(x), \quad (4.34)$$

где

$$\phi(x) = \{\phi_i(x)\}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

полагая, что вектор-функция $\phi_1(x)$ удовлетворяет дополнительному условию:

в) преобразование (4.34) является регулярным, т. е. для любых $x \in \mathcal{X}$ выполняется условие (4.4) и существует обратное преобразование

$$x = \phi^{-1}(\xi). \tag{4.35}$$

Перепишем уравнения (4.8)–(4.10), (4.32) в виде

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = \xi_3, \quad \dots, \quad \dot{\xi}_{n-1} = \xi_n, \quad \dot{\xi}_n = \alpha(x) + \beta(x) u, \tag{4.36}$$

где

$$\alpha(x) = \frac{\partial \phi_n}{\partial x} f, \quad \beta(x) = \frac{\partial \phi_n}{\partial x} g \neq 0, \tag{4.37}$$

что и соответствует искомой основной канонической форме. Ее векторный аналог имеет вид (рис. 4.6)

$$\dot{\xi} = A_0 \xi + b_0 (\alpha(x) + \beta(x) u), \tag{4.38}$$

где пара канонических матриц A_0, b_0 полностью управляема и $\beta \neq 0$.

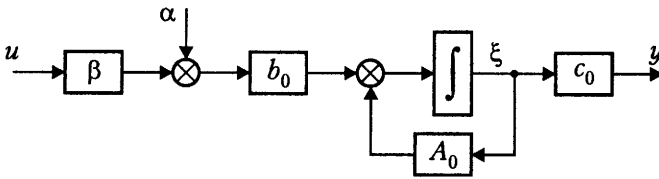


Рис. 4.6. Основная каноническая форма

Замечание 4.3. Для системы (4.23) при условии а) имеет место свойство

$$\phi_1^{(i)} = \mathcal{L}_f^i \phi_1, \tag{4.39}$$

аналогичное свойству (4.20) автономной системы (4.1) (см. замечание 4.2) и позволяющее упростить полученные выражения и, в частности, записать

$$\phi_i(x) = \mathcal{L}_f^{i-1} \phi_1, \tag{4.40}$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} g = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{i-1} \phi_1, \tag{4.41}$$

$i = 1, 2, \dots, n$. Тогда условия а)–б) принимают вид

$$\mathcal{L}_g \phi_1 = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^1 \phi_1 = \dots = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-2} \phi_1 = 0; \tag{4.42}$$

$$\beta(x) = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-1} \phi_1 \neq 0 \tag{4.43}$$

и

$$\alpha(x) = \mathcal{L}_f^n \phi_1. \tag{4.44}$$

□

Так как гипотеза в) обеспечивает существование обратного отображения, то уравнения (4.36) можно переписать в виде

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = \xi_3, \quad \dots, \quad \dot{\xi}_n = \bar{\alpha}(\xi) + \bar{\beta}(\xi)u, \quad (4.45)$$

где $\bar{\alpha} = \alpha \circ \phi^{-1}$, $\bar{\beta} = \beta \circ \phi^{-1}$.

Замечание 4.4. Модель (4.45) подобна ранее рассмотренной канонической форме (4.27). Действительно, выбрав вспомогательный выход в виде $y = \bar{\phi}(x)$, где $\bar{\phi} = \phi_1/\beta$, сразу же получим эквивалентную модель вида (4.27). \square

Нетрудно показать, что при условии в) модель (4.45) удовлетворяет условиям теоремы 4.3 и, следовательно, система (4.23) эквивалентна основной канонической форме (4.45).

Таким образом, система (4.23) приводима к виду (4.45), если можно отыскать вспомогательный выход (4.28), где гладкая функция ϕ_1 является решением системы дифференциальных уравнений в частных производных (4.30).

Возникает вопрос: в каких случаях существует требуемая функция ϕ_1 ? Есть простой способ проверки существования и, следовательно, локальной эквивалентности моделей, связанный с локальными свойствами матрицы

$$C_x = [\mathcal{L}_f^0 g \mid \mathcal{L}_f^1 g \mid \dots \mid \mathcal{L}_f^{n-1} g]$$

и подпространства (распределения, см. 1.1.3)

$$\mathcal{G}_x(x) = \text{span}\{\mathcal{L}_f^0 g, \mathcal{L}_f^1 g, \dots, \mathcal{L}_f^{n-1} g\}.$$

Теорема 4.5. Пусть в точке $x^* \in \mathcal{X}$ выполняются

$$\det C_x(x^*) \neq 0,$$

и распределение \mathcal{G}_x инволютивно в некоторой окрестности $\mathcal{E}(x^*)$. Тогда найдется регулярное преобразование координат (4.34) такое, что в некоторой окрестности $\mathcal{E}(x^*)$ система (4.23) (локально) эквивалентна системе (4.45).

Отметим, что упрощенные условия эквивалентности не исключают необходимости нахождения вспомогательного выхода системы (4.28), т. е. решения уравнений в частных производных (4.30).

4.1.3. Управляемость нелинейных систем

Возможность приведения к основной форме тесно связана с управляемостью системы управления. Каноническая модель (4.38) с очевидностью управляема во всем

пространстве \mathbb{R}^n . При этом матрица управляемости

$$C_\xi(\xi) = \bar{\beta}(\xi) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & (-1)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & * \\ 1 & * & \dots & * \end{vmatrix} \quad (4.46)$$

для любых $\xi \in \Xi$ невырождена, т. е. выполняется

$$\det C_\xi(\xi) \neq 0.$$

Поэтому и вопрос об управляемости основной системы зависит от возможности преобразования к виду (4.38), т. е. существования регулярного преобразования координат (4.34).

Напомним, что концепция управляемости связана с существованием управления, переводящего динамическую систему за конечное время в заданную точку $x = x_f$ (см. [1, 2, 15, 24] и т. д.). Для нелинейных систем можно ввести несколько понятий полной управляемости (рис. 4.7).

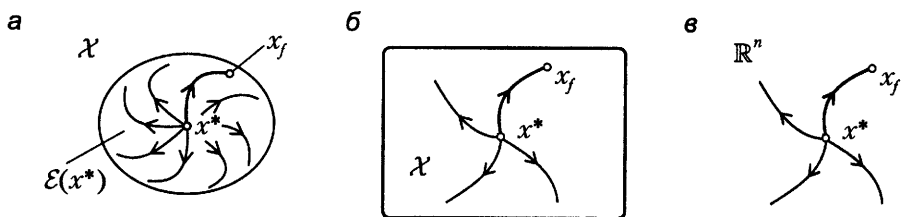


Рис. 4.7. Управляемость нелинейных систем

Определение 4.3. Система (4.23) называется (локально) управляемой в точке $x^* \in \mathcal{X}$, если найдется окрестность $\mathcal{E}(x^*)$ такая, что для любых $x_f \in \mathcal{E}(x^*)$ существует $T_f \geq t_0$ и ограниченное управление $u(t)$, $t \in [t_0, T_f]$, обеспечивающее

$$x(t, x^*, t_0) \in \mathcal{E}(x^*) \text{ при } t \in [t_0, T_f],$$

$$x(T_f, x^*, t_0) = x_f.$$

Система (4.23) называется управляемой на множестве \mathcal{X} , если она управляема во всех точках $x^* \in \mathcal{X}$, и $\mathcal{E}(x^*) = \mathcal{X}$.

Система (4.23) называется глобально управляемой, если она определена и управляема во всех точках $x^* \in \mathbb{R}^n$, и $\mathcal{E}(x^*) = \mathbb{R}^n$.

Отметим, что для случая $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ понятие управляемости нелинейной системы соответствует хорошо известному определению полной управляемости теории линейных систем [1, 2, 15, 24].

Следующее предложение показывает, что свойство управляемости сохраняется при эквивалентных преобразованиях.

Теорема 4.6. Пусть системы (4.23) и (4.24) эквивалентны. Тогда система (4.23) управляема в точке x^* (на множестве \mathcal{X} , в пространстве \mathbb{R}^n) тогда и только тогда, когда система (4.24) управляема в точке $\xi^* = \phi(x^*)$ (на множестве $\Xi = \phi(\mathcal{X})$, в пространстве \mathbb{R}^n).

Теорема 4.6 дает возможность проанализировать управляемость системы, исследуя свойства более простых эквивалентных моделей. Так, для случая, когда $\mathcal{X} = \Xi = \mathbb{R}^n$, отмеченная ранее управляемость в \mathbb{R}^n канонической модели (4.38) обеспечивает (при условии существования регулярного преобразования (4.34)) управляемость в \mathbb{R}^n основной системы. К сожалению, общие условия существования глобального преобразования и, в частности, условия диффеоморфизма отображения (4.34) отсутствуют, а его нахождение и проверка регулярности во всем пространстве состояний не тривиальны. Более того, для многих нелинейных систем глобального преобразования не существует вообще. Поэтому большее распространение получила локальная трактовка условий управляемости (в малой окрестности $\mathcal{E}(x^*)$).

Теорема 4.5 предлагает простые условия локальной эквивалентности моделей (4.23) и (4.45). Так как каноническая форма (4.45) управляема в любой точке $\xi^* \in \Xi$, то по теореме 4.6 при тех же условиях обеспечивается управляемость исходной системы (4.23) в точке $\xi^* = \phi(x^*)$. Таким образом, имеет место следующая формулировка условий локальной управляемости.

Теорема 4.7. Пусть в точке $x^* \in \mathcal{X}$ выполняется

$$\det C_x \neq 0,$$

и распределение \mathcal{G}_x инволютивно в некоторой окрестности $\mathcal{E}(x^*)$. Тогда система (4.23) (локально) управляема в точке x^* .

4.1.4. Методы линеаризации и алгоритмы локальной стабилизации

Свойства управляемости динамических систем и методы преобразования координат тесно связаны с проблемами линеаризации нелинейных моделей.

Точная линеаризация. Задача точной линеаризации формулируется следующим образом:

найти такое нелинейное преобразование управляющих воздействий (алгоритм точной линеаризации)

$$u = U(x) + L(x)\tilde{u}, \quad (4.47)$$

при котором на множестве \mathcal{X} система линейна или эквивалентна линейной модели.

Здесь \tilde{u} — новое управляющее воздействие; U и L — гладкие функции. Подставляя (4.47) в уравнение системы (4.23), получаем

$$\dot{x} = \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)\tilde{u}, \quad (4.48)$$

где $\tilde{f} = f + gU$, $\tilde{g} = gL$. Таким образом, рассматриваемая задача сводится к нахождению компонент U и L , которые обеспечивают эквивалентность системы (4.48) и некоторой линейной системы (обычно одной из основных канонических форм [1, 2, 15, 24]).

Следующий пример иллюстрирует указанную проблему.

Пример 4.3. Рассмотрим систему первого порядка

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (4.49)$$

где $g(x) \neq 0$. Управление

$$u = \frac{1}{g}(-f + \tilde{u}) \quad (4.50)$$

позволяет привести систему к виду

$$\dot{x} = \tilde{u}, \quad (4.51)$$

т. е. скомпенсировать все нелинейные компоненты. Тем не менее для системы второго порядка

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1), \quad \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + g(x)u \quad (4.52)$$

управление (4.50) не обеспечивает линейаризации, чем и обусловлена основная сложность проблемы. \square

Для нахождения алгоритма точной линейаризации воспользуемся преобразованием координат (4.34) и получим основную форму (4.38), которая в условиях теоремы 4.5 эквивалентна (4.23). Рассмотрим алгоритм

$$u = -\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + \frac{1}{\beta(x)} \tilde{u}. \quad (4.53)$$

Подставив в (4.36), получаем модель цепной формы (цепь интеграторов, рис. 4.8):

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = \xi_3, \quad \dots, \quad \dot{\xi}_{n-1} = \xi_n, \quad \dot{\xi}_n = \tilde{u}, \quad (4.54)$$

или

$$\dot{\xi} = A_0 \xi + b_0 \tilde{u}. \quad (4.55)$$

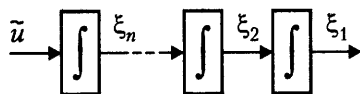


Рис. 4.8. Линеаризованная модель — цепная форма

Таким образом, алгоритм линеаризации (4.53), или (4.47), где

$$U(x) = -\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}, \quad L(x) = \frac{1}{\beta(x)}, \quad (4.56)$$

обеспечивает получение линейной полностью управляемой эквивалентной модели (4.55) за счет полной компенсации нелинейных компонент $\alpha(x)$, $\beta(x)$, что и подразумевается под термином *точная линеаризация*. При этом исходная система (4.23) имеет вид (4.48), где

$$\tilde{f} = f - \frac{\alpha}{\beta} g, \quad \tilde{g} = \frac{1}{\beta} g,$$

т. е. остается нелинейной.

Подчеркнем, что для эквивалентности моделей (4.48) и (4.55) требуется выполнение гипотезы теоремы 4.5, что в силу теоремы 4.7 соответствует условию локальной управляемости системы.

Рассмотренный прием предоставляет прекрасные возможности для решения целого ряда нелинейных проблем управления с использованием стандартных методов теории линейных систем.

Стабилизация состояния. Задача стабилизации нелинейной системы по отношению к положению равновесия $x^* = \phi^{-1}(0)$ решается выбором линейного по ξ и нелинейного по x статического алгоритма

$$\tilde{u} = k \xi = k \phi(x), \quad (4.57)$$

где $k = \{k_i\}$ — матрица-строка коэффициентов обратной связи:

$$k = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n].$$

Система (4.55) принимает вид

$$\dot{\xi} = A_c \xi, \quad (4.58)$$

где $A_c = A_0 + b_0 k$. Так как пара (A_0, b_0) полностью управляема, то матрица k может быть получена из обычного условия

$$\operatorname{Re} \lambda_i \{A_c\} < 0,$$

что и обеспечивает требуемую устойчивость модели (4.58).

Модель исходной системы получается подстановкой (4.57) в (4.48):

$$\dot{x} = \tilde{f}_c(x), \quad (4.59)$$

где

$$\tilde{f}_c = \tilde{f} + \tilde{g}k\phi = f - \frac{\alpha}{\beta} g + \frac{1}{\beta} gk\phi.$$

Эквивалентность моделей имеет место при условии управляемости (теоремы 4.5 и 4.7). Тогда по теореме 4.2 можно гарантировать, что при указанном выборе управления достигается локальная асимптотическая устойчивость исходной динамической системы (4.59).

Общая структура полученного регулятора включает уравнения (4.47), (4.53) и имеет вид

$$u = -\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + \frac{1}{\beta(x)} k\phi(x). \quad (4.60)$$

Замечание 4.5. Учитывая ранее введенные обозначения (см. замечания 4.2–4.3), можно записать следующую формулу управления, обеспечивающего решение задачи стабилизации состояния:

$$u = (-\mathcal{L}_f^n \phi_1 + k_1 \mathcal{L}_f^{n-1} \phi_1 + \dots + k_n \mathcal{L}_f^0 \phi_1) / \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-1} \phi_1. \quad (4.61)$$

□

Напомним, что основные сложности рассматриваемого подхода связаны с необходимостью выбора подходящей выходной переменной y , т. е. нахождения функции ϕ_1 , удовлетворяющей уравнениям в частных производных (4.30). Эта проблема устраняется при использовании методов приближенной линеаризации, основанных, например, на линейной аппроксимации нелинейной системы и 1-м методе Ляпунова.

Линейная аппроксимация. Здесь ограничимся рассмотрением локального поведения системы (4.23), полагая при этом, что существует положение равновесия $x = x^*$, и в этой точке система полностью управляема. В окрестности $\mathcal{E}(x^*)$ определим n -мерный вектор ошибки

$$\tilde{x} = x - x^*,$$

и используя ряд Тейлора в точке $x = x^*$, представим гладкие функции $f(x)$ и $g(x)$ как

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x^*) + F(x^*)\tilde{x} + o_f(\tilde{x}), \\ g(x) &= g(x^*) + G(x^*)\tilde{x} + o_g(\tilde{x}), \end{aligned}$$

где $F = \partial f / \partial x |_{x^*}$ — матрица Якоби системы (4.23), $G = \partial g / \partial x |_{x^*}$, а $o_f(\tilde{x})$, $o_g(\tilde{x})$ — остаточные члены ряда. Для достаточно малой окрестности $\mathcal{E}(x^*)$ модель ошибки принимает вид

$$\dot{\tilde{x}} = f(x^*) + F(x^*)\tilde{x} + \left(G(x^*)\tilde{x} + g(x^*) \right) u. \quad (4.62)$$

Рассмотрим алгоритм

$$u = U^* + \tilde{u}, \quad (4.63)$$

где $U^* = \text{const}$, а \tilde{u} — новая управляющая переменная, удовлетворяющая условию

$$\lim_{x \rightarrow x^*} \tilde{u} = 0.$$

Если пренебречь остаточными членами, то модель ошибки (4.62) можно записать в виде линейного уравнения

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{F}\tilde{x} + g^*\tilde{u} + \tilde{f}^*, \quad (4.64)$$

где $\tilde{F} = F + GU^*$, $g^* = g(x^*)$, $\tilde{f}^* = f(x^*) + g(x^*)U^*$. Задача сводится к стабилизации состояния $\tilde{x} = 0$ модели (4.64), что предполагает нахождение U^* из условия компенсации возмущающей компоненты \tilde{f}^* и далее определение управления \tilde{u} в форме стабилизирующих обратных связей по ошибке \tilde{x} .

Таким образом, возможность стабилизации связана, во-первых, с существованием числа U^* , являющегося решением уравнения

$$f(x^*) + g(x^*)U^* = 0, \quad (4.65)$$

и, во-вторых, с управляемостью модели ошибок (4.64). Оба свойства имеют место при условии управляемости исходной системы.

Теорема 4.8. Если в положении равновесия x^* выполняется

$$\det C_x(x^*) \neq 0,$$

и распределение \mathcal{G}_x инволютивно в окрестности $\mathcal{E}(x^*)$, то:

- 1) найдется число U^* , являющееся решением уравнения (4.65);
- 2) пара (\tilde{F}, g^*) полностью управляема.

Положение 1) непосредственно вытекает из определения равновесного состояния системы. Так как $g(x^*) \neq 0$, решение уравнения (4.65) находится как

$$U^* = -g^\perp(x^*)f(x^*), \quad (4.66)$$

где $g^\perp = (g^T g)^{-1} g^T$.

Таким образом, метод линейной аппроксимации позволяет преобразовать нелинейную систему к полностью управляемой линейной форме

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{F}\tilde{x} + g^*\tilde{u}. \quad (4.67)$$

Задача стабилизации модели ошибок в точке $\tilde{x} = 0$ простейшим образом решается с помощью линейных обратных связей

$$\tilde{u} = k^*\tilde{x}, \quad (4.68)$$

где матрица-строка коэффициентов обратной связи k^* выбирается из условия асимптотической устойчивости матрицы замкнутой системы

$$F_c^* = \tilde{F} + g^*k^*,$$

т. е. из условия $\operatorname{Re} \lambda_i\{F_c^*\} < 0$. Полный алгоритм стабилизации системы в положении равновесия $x = x^*$ принимает форму

$$u = U^* + k^*(x - x^*), \quad (4.69)$$

где постоянная U^* определяется из уравнения (4.66). Очевидно, что алгоритм намного проще выражения (4.61), полученного методом точной линеаризации.

Приведенные здесь результаты легко обобщаются на случай многоканальных систем с несколькими управляющими воздействиями (см. [26]).

4.2. Канонические формы вход-выход и стабилизация выхода

Для наиболее полного представления нелинейной системы требуется ввести в рассмотрение выходные переменные, характеризующие *внешнее* поведение системы. В этом разделе изучаются гладкие одноканальные нелинейные системы

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (4.70)$$

$$y = h(x), \quad (4.71)$$

т. е. системы с одним входом (управлением) u и одним выходом $y \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^1$, где дополнительно полагается, что h — гладкая функция, определенная на множестве \mathcal{X} , и $\mathcal{Y} = h(\mathcal{X})$ — открытое множество. Ограничимся рассмотрением локального поведения системы вблизи точки $x = x^* \in \mathcal{X}$, полагая также, что $y^* = h(x^*) = 0$ и $\operatorname{rank} h(x^*) = 1$.

Основное внимание уделим проблемам точной линеаризации и стабилизации выхода (см. 4.2.3). В силу априорной заданности уравнения выхода (4.71) линеаризация системы становится проще, чем для рассмотренной в 4.1.4 модели вход-состояние.

С другой стороны, этот же фактор часто служит причиной неразрешимости задачи линеаризации для *всей* системы, т. е. отсутствия статического закона управления, обеспечивающего эквивалентность данной нелинейной модели и некоторой линейной модели того же порядка. Поэтому задача точной линеаризации нелинейной модели вход-выход обычно ставится следующим образом:

найти алгоритм линеаризации (4.47) и преобразование координат $\phi(x)$ такие, что эквивалентная модель системы (4.70)–(4.71) или ее часть (модель внешней динамики) линейна.

Упомянутая здесь модель внешней динамики характеризует связь входных и выходных переменных. Ее порядок определяется относительной степенью рассматриваемой динамической системы.

4.2.1. Относительная степень и основное преобразование

Для одноканальной *линейной* системы

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (4.72)$$

$$y = cx \quad (4.73)$$

относительная степень ρ рассчитывается как разность между степенями знаменателя и числителя передаточной функции

$$W(p) = c(pI - A)^{-1}b = \frac{\beta_0 p^\nu + \beta_1 p^{\nu-1} + \dots + \beta_\nu}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}, \quad (4.74)$$

т. е. при $\beta_0 \neq 0$

$$\rho = n - \nu.$$

В общем случае относительная степень может быть найдена с помощью *основного преобразования* системы, т. е. процедуры последовательного дифференцирования уравнения выхода, представленной в 4.1.1–4.1.2.

Продифференцируем по времени уравнение выхода (4.71), и подставив (4.70), получим

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) + \frac{\partial h}{\partial x} g(x)u. \quad (4.75)$$

При условии, что в точке x^*

$$\frac{\partial h}{\partial x} g(x) \neq 0,$$

уравнение (4.75) дает описание связи входа и выхода системы в некоторой окрестности $\mathcal{E}(x^*)$, и значение относительной степени устанавливается как $\rho = 1$.

Если система такова, что $(\partial h/\partial x)g(x) = 0$, введем в рассмотрение функцию $h_2 = (\partial h/\partial x)f(x)$. Продифференцировав уравнение (4.75) и подставив (4.70), найдем

$$\ddot{y} = \frac{\partial h_2}{\partial x}f(x) + \frac{\partial h_2}{\partial x}g(x)u. \quad (4.76)$$

При условии, что в точке x^*

$$\frac{\partial h_2}{\partial x}g(x) \neq 0,$$

уравнение (4.76) дает описание связи входа и выхода системы, и значение относительной степени устанавливается как $\rho = 2$. В противном случае продолжаем процедуру дифференцирования.

В общем случае определим функции

$$h_i = \frac{\partial h_{i-1}}{\partial x}f, \quad i = 1, 2, \dots, \rho, \quad (4.77)$$

и будем полагать, что для рассматриваемой системы в точке x^* и некоторой ее окрестности $\mathcal{E}(x^*)$ выполняется:

а)

$$\frac{\partial h_1}{\partial x}g(x) = \frac{\partial h_2}{\partial x}g(x) = \dots = \frac{\partial h_{\rho-1}}{\partial x}g(x) = 0;$$

б)

$$\frac{\partial h_\rho}{\partial x}g(x) \neq 0.$$

Тогда процедура последовательного дифференцирования на ρ -м шаге приводит к уравнению

$$y^{(\rho)} = \frac{\partial h_\rho}{\partial x}f(x) + \frac{\partial h_\rho}{\partial x}g(x)u \quad (4.78)$$

с ненулевым множителем при управлении u . Уравнение (4.78) описывает связь входной и выходной переменных нелинейной системы, а его порядок соответствует искомому значению относительной степени нелинейной системы.

Определение 4.4. Число $\rho \leq n$, удовлетворяющее условиям а) и б), называется *относительной степенью* системы (4.70)–(4.71) в точке x^* .

Модель вход-выход (4.78) удобно записать в форме Коши. Для этого определим переменные

$$\xi_1 = y = h_1(x), \quad \xi_i = y^{(i-1)} = h_i(x), \quad i = 2, \dots, \rho, \quad (4.79)$$

и с учетом (4.78) получим (рис. 4.9):

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = \xi_3, \quad \dots, \quad \dot{\xi}_\rho = \alpha(x) + \beta(x)u, \quad (4.80)$$

$$y = \xi_1, \quad (4.81)$$

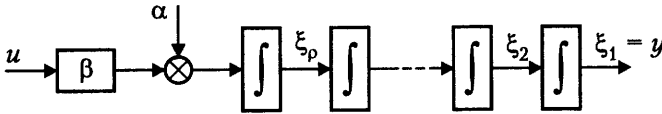


Рис. 4.9. Каноническая модель вход-выход

где

$$\alpha(x) = \frac{\partial h_\rho}{\partial x} f, \quad (4.82)$$

$$\beta(x) = \frac{\partial h_\rho}{\partial x} g \neq 0. \quad (4.83)$$

Замечание 4.6. Выражения (4.77), используя формализм производных Ли, можно переписать как

$$h_1(x) = h(x) = \mathcal{L}_f^0 h, \quad h_i(x) = \mathcal{L}_f^{i-1} h = \mathcal{L}_f h_{i-1}, \quad i = 2, \dots, \rho, \quad (4.84)$$

и

$$\frac{\partial h_i}{\partial x} g = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{i-1} h \quad (4.85)$$

(см. 1.1.3 и замечание 4.3). Тогда условия а) и б) принимают вид

$$\mathcal{L}_g h = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^1 h = \dots = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{\rho-2} h = 0; \quad (4.86)$$

$$\beta(x) = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{\rho-1} h \neq 0 \quad (4.87)$$

соответственно, и

$$\alpha(x) = \mathcal{L}_f^\rho h. \quad (4.88)$$

□

Для получения векторно-матричной формы уравнений (4.80)–(4.81) введем в рассмотрение ρ -мерный вектор *внешней динамики*

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\rho) = (y, \dot{y}, \dots, y^{\rho-1}) \in \Xi$$

и запишем

$$\dot{\xi} = H(x), \quad (4.89)$$

где

$$H(x) = \{h_i(x)\}, \quad i = 1, 2, \dots, \rho.$$

Используя свойства а) – б), нетрудно получить, что для системы относительной степени ρ гладкое отображение (4.89) $\mathcal{X} \mapsto \Xi$ регулярно в точке $x = x^*$, т. е.

$$\text{rank } H(x^*) = \rho. \quad (4.90)$$

Модель (4.80)–(4.81) перепишем в компактной форме (см. рис. 4.6):

$$\dot{\xi} = A_0 \xi + b_0 (\alpha(x) + \beta(x)u), \quad (4.91)$$

$$y = c_0 \xi, \quad (4.92)$$

где A_0 , b_0 — пара канонических полностью управляемых матриц (см. (4.19)) размерности $\rho \times \rho$ и $\rho \times 1$ соответственно, а матрица

$$c_0 = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$$

имеет размерность $1 \times \rho$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.9. Если система (4.70)–(4.71) имеет относительную степень ρ , то:

1) отображение (4.89) регулярно в точке $x = x^*$;

2) для любых $x_0 \in \mathcal{E}(x^*)$ и $t \in [0, T)$ связь входного воздействия $u(t)$ с выходом $y(t)$ описывается уравнениями (4.91)–(4.92).

В частном случае, когда основная система имеет относительную степень $\rho = n$, размерности моделей (4.70) и (4.91) равны. Выберем точку $x^* \in \mathcal{X}$ так, что $H(x^*) = 0$. Условие (4.90) перепишем в виде

$$\det \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=x^*} \neq 0, \quad (4.93)$$

что устанавливает локальный диффеоморфизм отображения (4.89) в окрестности точки x^* с обратным (гладким) отображением

$$x = H^{-1}(\xi),$$

единственность точки $x^* = H^{-1}(0)$ и, следовательно, локальную эквивалентность моделей (4.70) и (4.91) для некоторого временного интервала $t \in [0, T)$.

Полученная модель вход-выход (4.91)–(4.92) (или (4.80)–(4.81)) с использованием методики точной линеаризации (см. 4.1.4) легко приводится к линейной форме, после чего появляется возможность нахождения простого алгоритма, решающего ту или иную задачу управления (например, задачу стабилизации, см. 4.2.3).

В общем случае, когда $\rho < n$, размерности исходной и преобразованной систем не совпадают, т. е. они не эквивалентны (см. определение 4.2). Поэтому свойства системы (4.70) могут отличаться от свойств модели (4.91). Этот эффект связан с нуль-динамикой системы, т. е. поведением $(n - \rho)$ -мерной ее части, которая была потеряна в ходе приведения системы к виду (4.91)–(4.92).

4.2.2. Нуль-динамика и нормальная форма

Рассмотрим систему (4.70), для которой $\rho < n$, и следовательно, размерность модели (4.91) меньше n . Этот случай характерен для систем с *нуль-динамикой*, для которых выходному положению равновесия $y = 0$ соответствует множество значений x (см. 3.3.2–3.3.3).

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$H(x) = 0 \quad (4.94)$$

и соответствующий ему геометрический объект (рис. 4.10) — гладкую ν -мерную гиперповерхность

$$\mathcal{Z}^* = \{x \in X : H(x) = 0\},$$

удовлетворяющую условию регулярности (4.90), $\nu = n - \rho$.

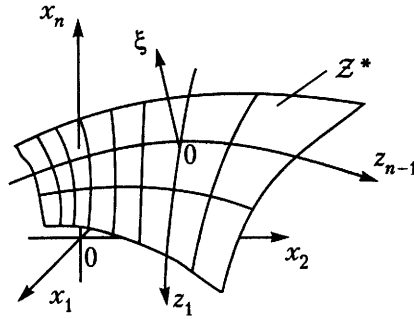


Рис. 4.10. Множество (гиперповерхность) нуль-динамики \mathcal{Z}^* и преобразование координат

Введем в рассмотрение локальные координаты поверхности z_i , вектор локальных координат $z = \{z_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, \nu$), определяемый выражением

$$z = \zeta(x), \quad (4.95)$$

и отображение

$$\begin{vmatrix} z \\ \xi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \zeta(x) \\ H(x) \end{vmatrix}. \quad (4.96)$$

Гладкая вектор-функция $\zeta(x)$ выбирается из условия регулярности отображения (4.96) в точках $x^* \in \mathcal{Z}^*$, т. е. так, чтобы

$$\det \begin{vmatrix} \partial \zeta / \partial x \\ \partial H / \partial \zeta \end{vmatrix}_{x \in \mathcal{Z}^*} \neq 0. \quad (4.97)$$

При условии (4.97) отображение (4.96) определяет регулярное преобразование координат с гладким обратным отображением

$$x = r(z, \xi). \quad (4.98)$$

Рассмотрим поведение системы с начальными условиями $x_0 \in \mathcal{Z}^*$ и, следовательно, $\xi_0 = H(x_0) = 0$. При условии, что (при соответствующем выборе управления) уравнение (4.91) имеет нулевое решение $\xi(t) \equiv 0$, выходная переменная также обращается в нуль: $y = 0$, а соответствующие траектории системы лежат на поверхности \mathcal{Z}^* . Последнее подтверждает тот факт, что \mathcal{Z}^* обладает свойствами инвариантной поверхности системы (4.70), движение по которой соответствует нулевому значению выхода y , т. е. является множеством нуль-динамики системы (4.70), (4.71) (см. определение 3.10 и рис. 3.13).

Для анализа поведения системы (4.70)–(4.71) вблизи поверхности \mathcal{Z}^* зафиксируем точки $z = z^*$, $x^* = r(z^*, 0)$ и построим полную преобразованную модель системы в достаточно малой окрестности $\mathcal{E}(x^*)$. Продифференцируем уравнение (4.95) по времени, и подставив (4.70), найдем *модель нуль-динамики*

$$\dot{z} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} f(x) + \frac{\partial \zeta}{\partial x} g(x) u. \quad (4.99)$$

Функция ζ может быть выбрана так, чтобы модель (4.99) была независима от управления u , т. е.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} g(x) = 0.$$

Возможность такого выбора следует из теоремы Фробениуса (см. [7, 26, 47]). В этом случае уравнение (4.99) (с учетом обратного преобразования (4.98)) принимает вид

$$\dot{z} = f_z(z, \xi), \quad (4.100)$$

где

$$f_z = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} f \right) \circ r(z, \xi).$$

Дополним систему (4.100) найденной ранее моделью (4.91)–(4.92) и получим так называемую *нормальную форму* нелинейной системы (4.70)–(4.71):

$$\dot{z} = f_z(z, \xi), \quad (4.101)$$

$$\dot{\xi} = A_0 \xi + b_0 (\alpha(x) + \beta(x)u), \quad (4.102)$$

$$y = c_0 \xi, \quad (4.103)$$

которая представлена моделью *нулевой динамики* (4.101), моделью *внешней динамики* (4.102) и уравнением выхода (4.103) (рис. 4.11).

Координаты вектора z (локальные координаты поверхности \mathcal{Z}^*) определяют нуль-динамику основной системы, координаты вектора ξ , представленные выходной переменной y и ее производными, характеризуют текущие отклонения от поверхности \mathcal{Z}^* , или *внешнюю динамику* системы.

После преобразования системы к нормальной форме становится возможным корректное решение задачи точной линеаризации модели вход-выход и ее стабилизации (см. 4.2.3) при полной уверенности, что преобразованная модель эквивалентна исходной системе.

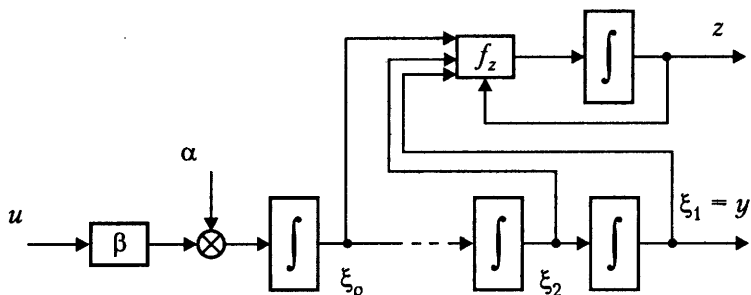


Рис. 4.11. Нормальная форма нелинейной системы

Пример 4.4. Построим нормальную форму линейной динамической системы (4.72)–(4.73) с передаточной функцией $W(p)$, где

$$\beta_0 = cA^{\rho-1}b \neq 0$$

и $\rho = n - \nu$. Линейное уравнение (система ρ линейных уравнений)

$$H_0 x = 0,$$

где

$$H_0 = \begin{vmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{\rho-1} \end{vmatrix}$$

и

$$\text{rank } H_0 = \rho,$$

описывает центральную гиперплоскость (ν -мерное подпространство нуль-динамики)

$$\mathcal{Z}^* = \{x \in \mathbb{R}^n : H_0 x = 0\},$$

движение по которой соответствует нулевому выходу системы (4.72)–(4.73).

Введем в рассмотрение преобразование координат

$$z = Z_0 x, \quad (4.104)$$

$$\xi = H_0 x, \quad (4.105)$$

где $\xi \in \mathbb{R}^\rho$, $z \in \mathbb{R}^\nu$, а матрица Z_0 выбирается из условий

$$Z_0 b = 0, \quad (4.106)$$

$$\det \begin{vmatrix} Z_0 \\ H_0 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (4.107)$$

Дифференцируя (4.104)–(4.105) по времени с учетом (4.72)–(4.73) и (4.106), получаем следующую модель, соответствующую нормальной форме линейной системы

$$\dot{z} = A_z z + B_z \xi, \quad (4.108)$$

$$\dot{\xi} = A_0 \xi + b_0 (cA^p x + \beta_0 u), \quad (4.109)$$

$$y = c_0 \xi. \quad (4.110)$$

При выборе управления в форме алгоритма «точной линеаризации» (см. 4.1.4)

$$u = \frac{1}{\beta_0} (-cA^p x + \tilde{u}),$$

где \tilde{u} — новая управляющая переменная, модель внешней динамики (4.109) принимает вид

$$\dot{\xi} = A_0 \xi + b_0 \tilde{u}, \quad (4.111)$$

и влияние подсистемы (4.108) на выходную переменную y полностью устраняется, что (при $\rho < n$) обеспечивает упрощение задачи стабилизации выхода.

Для начальных условий $x_0 \in \mathcal{Z}^*$ имеет место $\xi_0 = H(x_0) = 0$, и при $\tilde{u} = 0$ уравнение (4.111) имеет нулевое решение $\xi(t) = 0$, выходная переменная — $y \equiv 0$, а соответствующие траектории системы лежат на плоскости \mathcal{Z}^* . Последнее показывает, что \mathcal{Z}^* обладает свойствами инвариантного множества линейной системы (4.72)–(4.73), движение по которому соответствует нулевому значению выхода y , т. е. является множеством нуль-динамики системы (4.70)–(4.71) (см. определение 3.10).

С другой стороны, собственные значения матрицы A_z (определяющие свойства устойчивости подсистемы (4.108) при $\xi(t) \equiv 0$) совпадают с нулями передаточной функции (4.74). Этим также можно объяснить происхождение термина «нуль-динамика». \square

Замечание 4.7. Приведенный пример показывает, в частности, что термин *точная линеаризация* является достаточно условным, и указанный прием соответствует обычной *компенсации* некоторых компонент модели динамической системы, позволяющей в дальнейшем упростить общую задачу управления. Тем не менее в нелинейных системах компенсация такого рода действительно обеспечивает получение *линейной* модели внешней динамики и служит инструментом решения множества нетривиальных задач. \square

4.2.3. Точная линеаризация и стабилизация выхода

Модель внешней динамики (4.91)–(4.92) (или (4.80)–(4.81)) легко приводится к линейной форме с использованием методики точной линеаризации (см. 4.1.4),

что в общем случае ($\rho \neq n$) соответствует *частичной* линеаризации нелинейной системы. Выберем алгоритм линеаризации

$$u = \frac{1}{\beta(x)} \left(-\alpha(x) + \tilde{u} \right), \quad (4.112)$$

где \tilde{u} — новая управляющая переменная. После подстановки алгоритма (4.112) модель (4.91) принимает вид простейшей линейной стационарной системы

$$\dot{\xi} = A_0 \xi + b_0 \tilde{u}. \quad (4.113)$$

Модель (4.113), (4.109) полностью определяет связь выходной переменной y и входа \tilde{u} . Модель представляет собой цепь интеграторов (рис. 4.12) и может быть записана в виде:

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = \xi_3, \quad \dots, \quad \dot{\xi}_\rho = \tilde{u}, \quad (4.114)$$

$$y = \xi_1. \quad (4.115)$$

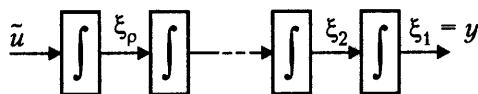


Рис. 4.12. Линеаризованная модель — цепная форма

Полученные модели внешней динамики полностью управляемы и стабилизируются с помощью линейного (по отношению к вектору ξ) алгоритма управления

$$\tilde{u} = k \xi = k H(x), \quad (4.116)$$

где $k = \{k_i\}$ — матрица-строка коэффициентов обратной связи:

$$k = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_\rho].$$

После подстановки (4.116) система (4.114) принимает вид

$$\dot{\xi} = A_c \xi, \quad (4.117)$$

где $A_c = A_0 + b_0 k$, и матрица k может быть найдена из обычного условия

$$\operatorname{Re} \lambda_i \{A_c\} < 0,$$

что и обеспечивает требуемую устойчивость модели (4.114).

Пусть основная система имеет относительную степень $\rho = n$, размерности моделей (4.70) и (4.91) совпадают, и выполняется условие регулярности (4.93). Последнее

обеспечивает эквивалентность исходной системы и модели (4.117), а следовательно (по теореме 4.2) и асимптотическую устойчивость замкнутой системы (4.70) в некоторой окрестности $\mathcal{E}(x^*)$.

В общем случае ($\rho \neq n$) модель внешней динамики замкнутой системы (4.117) должна быть дополнена уравнением нуль-динамики (4.101), и рассматриваемая задача является задачей *частичной стабилизации* (по переменным ξ_i). Алгоритм (4.112), (4.116) не всегда обеспечивает ее корректное решение, что связано с возможной неустойчивостью или неполнотой нуль-динамики (векторного поля f_z). Так, нарушение условия полноты может привести к разрушению системы в некоторый момент времени T , что соответствует нарушению одного из условий частичной асимптотической устойчивости (см. п. 3.2).

Пусть нуль-динамика системы асимптотически устойчива, т. е. автономная модель

$$\dot{z} = f_z(z, 0) \quad (4.118)$$

локально асимптотически устойчива по отношению к некоторому положению равновесия $z = z^*$. Тогда имеет место следующее утверждение [46, 47]:

система (4.70) с линеаризирующим алгоритмом (4.112) и стабилизирующим алгоритмом (4.116) локально асимптотически устойчива по отношению к состоянию $x = x^ = r(z^*, 0)$ и выходу $y = 0$.*

В более общем случае, когда нуль-динамика не является асимптотически устойчивой, устойчивость системы по состоянию не достигается, но имеется возможность обеспечить устойчивость системы по выходу y или, более точно, — частичную устойчивость по ξ (см. п. 3.2).

Пусть модель нуль-динамики (4.118) (векторное поле f_z) является полной в некоторой окрестности $\mathcal{E}(z^*)$. Тогда имеет место следующее утверждение [46]:

система (4.70) с линеаризирующим алгоритмом (4.112) и стабилизирующим алгоритмом (4.116) локально асимптотически устойчива по отношению к частичному положению равновесия $\xi = 0$ и выходу $y = 0$.

Напомним (см. п. 3.2), что частичная асимптотическая устойчивость системы обычно связана с аттрактивностью множества нулевой динамики \mathcal{Z}^* .

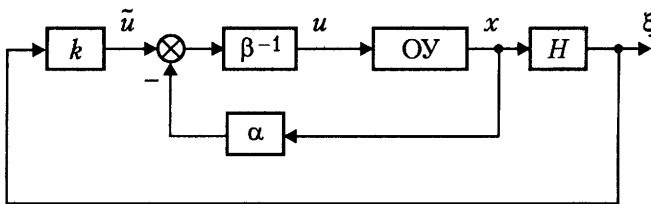


Рис. 4.13. Система управления

Полное описание регулятора, обеспечивающего стабилизацию системы по выходу, включает выражения (4.112), (4.116) и, следовательно, имеет вид (рис. 4.13)

$$u = -\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + \frac{1}{\beta(x)} kH(x). \quad (4.119)$$

Замечание 4.8. Учитывая ранее введенные обозначения (см. замечания 4.3–4.6), можно записать следующую формулу управления, обеспечивающего решение задачи стабилизации выхода:

$$u = (-\mathcal{L}_f^p h + k_1 \mathcal{L}_f^{p-1} h + \dots + k_p \mathcal{L}_f^0 h) / (\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{p-1} h). \quad (4.120)$$

□

4.3. Управление каскадными системами

В этом разделе исследуются гладкие динамические системы каскадной (треугольной) формы, состоящие из двух подсистем (рис. 4.14):

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi \quad (4.121)$$

и

$$\dot{\xi} = \alpha(x, \xi) + \beta(x, \xi)u, \quad (4.122)$$

где u — управление, а вектор ξ может рассматриваться как вход подсистемы (4.121).

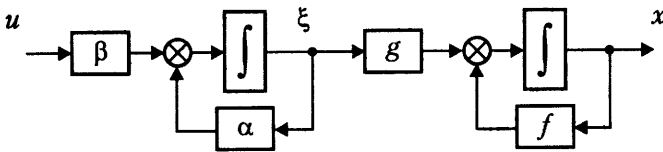


Рис. 4.14. Каскадная система

Будем рассматривать задачи синтеза алгоритма управления системой (4.121), (4.122) при условии, что известно соответствующее решение задачи управления подсистемой (4.121). Последнее означает, что заранее определен алгоритм — *виртуальное управление*

$$\xi = U_\xi(x), \quad (4.123)$$

где U_ξ — гладкая функция, обеспечивающее для любых $x \in \mathcal{X}$ требуемое поведение замкнутой (по входу ξ) подсистемы (4.121). Уравнение (4.121) после подстановки (4.123) принимает вид

$$\dot{x} = f_c(x), \quad (4.124)$$

где $f_c = f + gU_\xi$. Задачи синтеза сводятся к нахождению реального входного воздействия u системы (4.121)–(4.122), гарантирующего (обычно асимптотически) такое же поведение нелинейной части (4.121).

Заметим, что в указанной постановке модель (4.124) играет роль внутренней (неявной) модели желаемой динамики подсистемы. С другой стороны, с учетом того, что в координатах (x, ξ) уравнение (4.123) описывает поверхность, рассматриваемая задача имеет прямое отношение к вопросам инвариантности и аттрактивности нетривиальных множеств (см. 2.1.3 и п. 3.2).

Далее ограничимся рассмотрением упрощенной каскадной системы (4.121)–(4.122), представленной подсистемами первого порядка, и изучением задачи стабилизации подсистемы (4.121) в точке $x = 0$ (общий случай представлен в [26]). Полагаем, что x, ξ — скалярные переменные, а также $g(0) \neq 0, \beta(0, 0) \neq 0$. В рассматриваемом случае виртуальное управление (4.123), стабилизирующее модель (4.121), легко находится как

$$\xi = U_\xi(x) = \frac{1}{g(x)}(-f(x) + k_0x), \quad (4.125)$$

Замкнутая модель (4.124) принимает вид

$$\dot{x} = k_0x \quad (4.126)$$

и асимптотически устойчива при условии, что $k_0 < 0$.

Для нахождения реального управления u введем в рассмотрение переменную ошибки

$$e = \xi - U_\xi(x) \quad (4.127)$$

и обратное преобразование

$$\xi = e + U_\xi(x). \quad (4.128)$$

В силу последнего можно переписать модель подсистемы (4.121) в виде

$$\dot{x} = k_0x + g(x)e. \quad (4.129)$$

Дифференцируя (4.127) по времени и подставляя (4.122), находим модель ошибки

$$\dot{e} = \alpha_c(x, e) + \beta_c(x, e)u, \quad (4.130)$$

где

$$\alpha_c = \alpha - \frac{\partial U_\xi}{\partial x}(k_0x + ge), \quad \beta_c(x, e) = \beta(x, e + U_\xi(x)). \quad (4.131)$$

Очевидно, что полученная модель (4.129)–(4.130) (рис. 4.15) эквивалентна первоначальной системе.

Выбирая следующий алгоритм управления

$$u = \frac{1}{\beta_c(x, \xi)}(-\alpha_c(x, e) + k_e e), \quad (4.132)$$

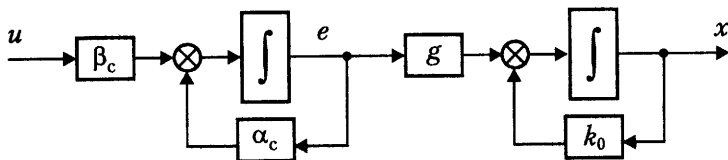


Рис. 4.15. Эквивалентная модель каскадной системы

получаем линейную модель ошибки

$$\dot{e} = k_e e. \quad (4.133)$$

При условии $k_e < 0$ модель (4.133) асимптотически устойчива.

Если $e(0) = 0$ и, следовательно, $e(t) \equiv 0$, то модели (4.124) и (4.129) идентичны, что соответствует идеальному решению рассматриваемой задачи стабилизации. В случае когда $e(0) \neq 0$, ошибка $e(t)$ стремится к нулю, и можно гарантировать, что решения системы (4.129) асимптотически приближаются к решениям модели (4.124). Таким образом, система (4.129), (4.133) локально асимптотически устойчива по отношению к положению равновесия $(x, e) = (0, 0)$, что и обеспечивает (локальную) асимптотическую устойчивость подсистемы (4.129) в точке $x = 0$.

Окончательно алгоритм управления (4.132) в силу (4.127) и (4.131) можно записать в виде

$$u = \frac{1}{\beta(x, e + U_\xi(x))} \left(-\alpha + \frac{\partial U_\xi}{\partial x} (f + g\xi) + k_e (\xi - U_\xi(x)) \right), \quad (4.134)$$

где $U_\xi(x)$ рассчитывается по формуле (4.125).

Отметим, что уравнение

$$e = \xi - U_\xi(x) = 0$$

определяет в \mathbb{R}^2 гладкую гиперповерхность (кривую) S^* , которая (при выбранном управлении) является инвариантным множеством и аттрактором рассматриваемой системы. Более того, полученная система является частично асимптотически устойчивой по переменной e .

Рассмотренная процедура широко используется для решения различных задач управления каскадными объектами, возникающих в теории нелинейных и адаптивных систем, и обобщена для случаев, когда требуется обеспечить глобальную устойчивость системы (см. [26]).

Глава 5. Согласованное управление и траекторные задачи

Задача *согласованного управления* заключается в поддержании заданных функциональных соотношений выходных переменных многоканальной системы с целью обеспечения идентичного, пропорционального или подобного поведения отдельных ее частей [19, 21, 26, 27]. Общий подход к ее решению разработан в конце прошлого века [21, 27] и получил название *метода согласованного управления*. Рассматриваемая задача сводится к стабилизации системы относительно некоторого аттрактора выходного пространства и поддержания желаемого продольного движения системы по кривым или гиперповерхностям. С этой точки зрения задача относится к проблематике управляемого *пространственного движения* и включает широко распространенные задачи *траекторного* и *контурного* управления, а также задачи стабилизации движения системы относительно более сложных геометрических объектов [6, 16, 18, 25, 26, 27, 51].

5.1. Задачи согласования и траекторного управления

Рассмотрим специфические свойства многоканальной системы (объекта управления), состоящей из m независимых или взаимосвязанных подсистем ОУ 1, ОУ 2, ..., ОУ m с выходными переменными $y_j(t)$ и управлениями (входными переменными) $u_j(t)$ (рис. 5.1). Пусть объект управления описывается уравнениями

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, \quad (5.1)$$

$$y = h(x), \quad (5.2)$$

где $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $y = \{y_j\} \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^m$, а управление $u = \{u_j\}$ вырабатывается регулятором

$$u = U(x). \quad (5.3)$$

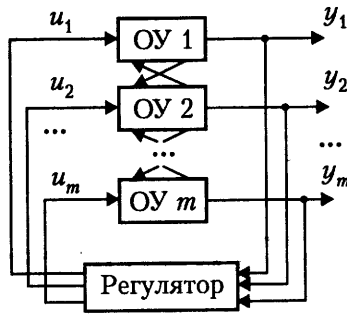


Рис. 5.1. Многоканальная система

Наиболее распространенная проблема управления выходом многоканальной системы (см. 4.2.3 и [26]) заключается в нахождении управляющих воздействий u_j , обеспечивающих стабилизацию выхода $y(t)$ относительно требуемого значения $y = y^*$. В более сложных задачах предполагается, что стандартная проблема стабилизации дополняется некоторыми правилами взаимодействия подсистем. Последние часто представлены в виде *голономных* связей между выходами системы — так называемых *условий согласования*

$$\varphi_j(y) = 0, \quad (5.4)$$

где $j = 1, 2, \dots, m - 1$, φ_j — гладкие функции, что предопределяет необходимость согласования управляющих воздействий u_j . Такие связи изначально независимых или взаимодействующих систем порождают специфические проблемы анализа и согласованного управления.

Определение 5.1. Движение системы (5.1)–(5.3) называется *согласованным*, если ее выходы $y_j(t)$ подчинены условиям согласования (5.4).

Проблемы согласования и согласованного управления возникают во многих случаях, когда требуется обеспечить идентичное или сходное поведение однотипных подсистем составной системы, синхронизацию нескольких гармонических или неперiodических процессов и т. д. Более того, рассматриваемая проблематика включает задачи *пространственного движения* типа орбитальной стабилизации и траекторного (контурного) управления. Действительно, условия (5.4) представляют собой неявную форму задания кривой (одномерной гиперповерхности, см. 1.1.4) пространства \mathbb{R}^m :

$$S^* = \{y \in \mathcal{Y} : \varphi_j(y) = 0\},$$

и для согласованного движения она является инвариантным множеством системы (5.1)–(5.3) (рис. 5.2). На практике подобные задачи возникают во многих механических и робототехнических системах при организации их движения в физическом (декартовом) пространстве [6, 26].

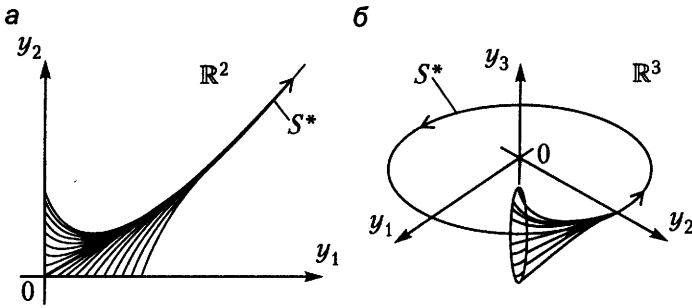


Рис. 5.2. Согласованное движение и орбитальная устойчивость

После принудительного согласования составная система может быть представлена как единый объект, динамика которого характеризуется обобщенным выходом $s(t)$, причем переменная s может быть выбрана как один из выходов системы $s = y_k$, среднеарифметическое

$$s = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_m}{m}, \quad (5.5)$$

или в более общей форме

$$s = \psi(y), \quad (5.6)$$

где ψ — некоторая гладкая функция. Такая переменная является локальной координатой кривой (например, длиной дуги, см. 1.1.4) и характеризует *продольное движение* системы (рис. 5.3).

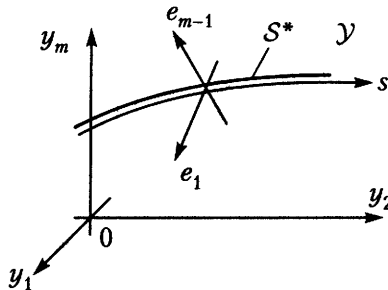


Рис. 5.3. Задачно-ориентированные координаты

Понятие согласованного движения (определение 5.1) подразумевает, что начальные значения выходов системы y_j также подчинены условиям (5.4), или начальная точка движения $y(0)$ лежит на кривой S^* . В общем случае, когда $y(0)$ не принадлежит S^* , условие (5.4) должно выполняться с течением времени — асимптотически (см. рис. 5.2). Введем в рассмотрение вектор $e = \{e_j\}$:

$$e = \varphi(y), \quad (5.7)$$

где $\varphi = \{\varphi_j\}$, $j = 1, 2, \dots, m - 1$. Для согласованного движения и $y(t) \in \mathcal{S}^*$ выполняется $e(t) \equiv 0$, в то время как в окрестности множества \mathcal{S}^* вектор e характеризует текущие нарушения условий (5.4) и *поперечное движение* системы в пространстве \mathbb{R}^m (см. рис. 5.3).

Определение 5.2. Движение системы (5.1)–(5.3) называется *асимптотически согласованным*, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0. \quad (5.8)$$

Поведение системы, соответствующее асимптотически согласованному движению, часто связывают со свойством притяжения его траекторий к инвариантному множеству \mathcal{S}^* (см. 2.1.3 и рис. 5.2–5.3).

Задача *согласованного управления* динамической системой (5.1)–(5.2) формулируется как задача нахождения алгоритма управления (5.3), который обеспечивает асимптотически согласованное движение (определение 5.2) и желаемую продольную динамику $s(t)$. Последняя может быть предписана с помощью эталонной переменной $s^*(t)$, что связано с задачей компенсации продольной ошибки

$$\Delta s = s^* - s, \quad (5.9)$$

или задана в виде эталонной скорости продольного движения $V_s^*(t) = \dot{s}^*(t)$.

5.2. Управление кинематической моделью

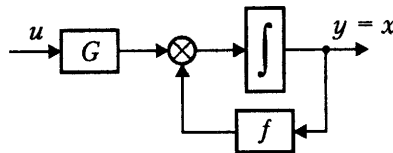


Рис. 5.4. Объект управления (кинематическая модель)

Рассмотрим простейший случай, когда динамика объекта управления представлена так называемой *кинематической моделью* (рис. 5.4), т. е. $\dim x = \dim y = n$, уравнение выхода (5.2) принимает вид

$$y = x \quad (5.10)$$

и $\det G(x) \neq 0$. Пусть желаемый режим продольной динамики $s(t)$ представлен в виде задания по скорости:

$$\dot{s}^* = V_s^*(t). \quad (5.11)$$

Преобразуем систему и приведем задачу к проблеме устойчивости по части переменных (см. 3.2.1). Такое преобразование осуществляется с помощью отображения (5.6)–(5.7), т. е.

$$\begin{vmatrix} s \\ e \end{vmatrix} = \phi(x) = \begin{vmatrix} \psi(x) \\ \varphi(x) \end{vmatrix}. \quad (5.12)$$

Введем в рассмотрение матрицу Якоби отображения (5.12):

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{vmatrix} \partial \psi / \partial x \\ \partial \varphi / \partial x \end{vmatrix}.$$

Будем полагать, что функции ψ и φ выбраны так, что для любых $x \in \mathcal{S}^*$ выполняется: $\text{rank } \phi(x) = n$, т. е. (см. 1.1.2)

$$\det \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x \in \mathcal{S}^*} \neq 0. \quad (5.13)$$

Последнее дает возможность заключить, что отображение (5.12) является локальным диффеоморфизмом с гладким обратным отображением

$$x = r(s, e), \quad (5.14)$$

и следовательно, формула (5.12) определяет регулярное преобразование координат (см. 4.1.1–4.1.2).

Для нахождения соответствующей эквивалентной модели продифференцируем уравнение (5.12) по времени, и подставив (5.1), получим искомую *задачно-ориентированную* модель рассматриваемой системы

$$\begin{vmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \end{vmatrix} = \frac{\partial \phi}{\partial x} (f(x) + G(x)u). \quad (5.15)$$

Теперь задача управления сводится к частичной стабилизации полученной модели по отношению к вектору e и может быть решена с использованием методов, рассмотренных в главе 4. В первую очередь воспользуемся приемом точной линеаризации (см. 4.2.3) и выберем линеаризирующий алгоритм

$$u = G^{-1}(x) (-f(x) + \tilde{u}), \quad (5.16)$$

где \tilde{u} — новый вектор управления. Затем выберем \tilde{u} как

$$\tilde{u} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^{-1} \begin{vmatrix} u_s \\ u_e \end{vmatrix}, \quad (5.17)$$

где u_s — скалярное *продольное* управление, u_e — $(n-1)$ -мерный вектор *поперечного* управления. Модель (5.15) принимает форму двух простых независимых линейных систем:

$$\dot{s} = u_s, \quad (5.18)$$

$$\dot{e} = u_e. \quad (5.19)$$

Окончательно, выбирая

$$u_s = V_s^*, \quad (5.20)$$

$$u_e = -k_e e, \quad (5.21)$$

где $k_e > 0$ — матрица обратных связей, получаем требуемые свойства замкнутой системы (выражения (5.8) и (5.11)), т. е. асимптотическое согласование движений (определение 2) и заданную продольную скорость V_s^* .

Синтезированный алгоритм управления (рис. 5.5) содержит простые локальные регуляторы (5.20)–(5.21), преобразование управлений (5.17) и линеаризирующий алгоритм (5.16).

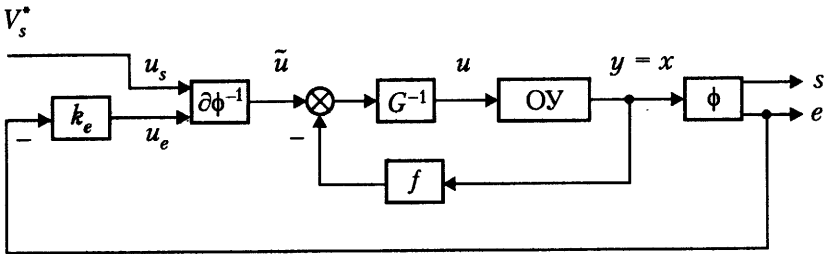


Рис. 5.5. Система согласованного управления

Отметим, что выбор функций φ и ψ неоднозначен. Можно, в частности, воспользоваться так называемым *нормализованным описанием* кривой (см. [26]), для которого указанные функции таковы, что на самой кривой S^* матрица Якоби ортогональна:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^{-1} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^T. \quad (5.22)$$

Это приводит к следующей модификации уравнения (5.17):

$$\tilde{u} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^T \begin{vmatrix} u_s \\ u_e \end{vmatrix}. \quad (5.23)$$

5.3. Управление динамической моделью

Обычно задачи управления, первоначальная постановка которых осуществляется в пространстве выходных переменных системы y_j , не могут быть успешно решены в рамках моделей вход-выход. В нетривиальных случаях требуется анализ системы в пространстве состояния \mathbb{R}^n или некоторой его области \mathcal{X} .

Рассмотрим плоское движение двухканального объекта 4-го порядка и относительной степени $\rho = 2$ (рис. 5.6):

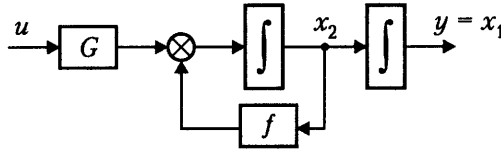


Рис. 5.6. Объект управления

$$\dot{x}_1 = x_2, \tag{5.24}$$

$$\dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + G(x_1, x_2)u, \tag{5.25}$$

$$y = x_1, \tag{5.26}$$

где $(x_1, x_2) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^4$, $y = (y_1, y_2) \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)$ и $\det G \neq 0$. Задача управления в этом случае заключается в нахождении алгоритма управления, который обеспечивает поддержание скалярного соотношения между двумя выходными переменными y_1, y_2 :

$$\varphi(y) = 0 \tag{5.27}$$

(что соответствует плоской кривой S^* , рис. 5.7), и желаемого режима продольного движения $s(t)$. Такой режим может быть задан с помощью эталонной модели

$$\ddot{s}^* = a_s(s^*, \dot{s}^*), \tag{5.28}$$

и тогда последняя задача сводится к компенсации ошибки продольного движения

$$\Delta s = s^* - s.$$

При использовании упрощенного задания по скорости $\dot{s}^*(t)$, вырабатываемого моделью (5.11), задача управления продольным движением заключается в компенсации скоростной ошибки

$$\Delta \dot{s} = V_s^* - \dot{s}. \tag{5.29}$$

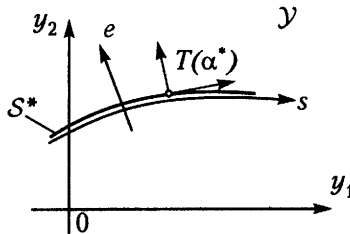


Рис. 5.7. Геометрия плоского траекторного движения

Для получения задачно-ориентированной модели системы воспользуемся основным преобразованием, представленным в 4.2.1. Определим функции

$$\phi_1(x_1) = \phi(y) = \begin{vmatrix} \psi(x_1) \\ \varphi(x_1) \end{vmatrix}, \tag{5.30}$$

$$\phi_2(x_1, x_2) = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} x_2. \quad (5.31)$$

Дифференцируя уравнение (5.30) по времени и подставляя (5.24) и (5.31), получаем

$$\begin{vmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \end{vmatrix} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} x_2 = \phi_2(x_1, x_2). \quad (5.32)$$

Находим

$$x_2 = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \right)^{-1} \begin{vmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \end{vmatrix}. \quad (5.33)$$

Далее, дифференцируя (5.32) и подставляя (5.24)–(5.25) и (5.33), получаем исконую задачно-ориентированную модель

$$\begin{vmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{e} \end{vmatrix} - A(x_1, x_2) \begin{vmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \end{vmatrix} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \left(f(x_1, x_2) + G(x_1, x_2)u \right), \quad (5.34)$$

где

$$A(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \right)^{-1}.$$

Основная задача управления решается с помощью методики, рассмотренной в п. 4.2 и 5.2. Воспользуемся алгоритмом точной линеаризации (см. 4.2.3)

$$u = G^{-1}(x_1, x_2) \left(-f(x_1, x_2) + \tilde{u} \right) \quad (5.35)$$

и выберем \tilde{u} как

$$\tilde{u} = \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \right)^{-1} \begin{vmatrix} u_s \\ u_e \end{vmatrix}, \quad (5.36)$$

где u_s, u_e — скалярные управления. Тогда модель (5.34) можно записать в виде

$$\ddot{s} - a_{11}(x_1, x_2)\dot{s} = a_{12}(x_1, x_2)\dot{e} + u_s, \quad (5.37)$$

$$\ddot{e} - a_{22}(x_1, x_2)\dot{e} = a_{21}(x_1, x_2)\dot{s} + u_e. \quad (5.38)$$

Выбирая поперечное управление

$$u_e = -a_{21}(x_1, x_2)\dot{s} - k_{e1}\dot{e} - k_{e2}e, \quad (5.39)$$

где k_{e1}, k_{e2} — коэффициенты обратной связи, получаем

$$\ddot{e} + (k_{e2} - a_{22}(x_1, x_2))\dot{e} + k_{e1}e = 0.$$

Соответствующий выбор коэффициентов k_{e1}, k_{e2} позволяет обеспечить необходимое свойство асимптотического согласования (определение 5.2, выражение (5.8)) и аттрактивность кривой S^* .

На кривой \mathcal{S}^* , где $e = \dot{e} = 0$, уравнение продольной динамики (5.37) принимает вид

$$\ddot{s} - a_{11}(x_1, x_2)\dot{s} = u_s. \tag{5.40}$$

Принимая во внимание (5.9) и (5.28), находим

$$\Delta\ddot{s} - a_{11}(x_1, x_2)\Delta\dot{s} = -a_{11}(x_1, x_2)\dot{s}^* + a_s(s^*, \dot{s}^*) - u_s. \tag{5.41}$$

Тогда, выбирая

$$u_s = -a_{11}(x_1, x_2)\dot{s}^* + a_s(s^*, \dot{s}^*) + k_{s1}\Delta\dot{s} + k_{s2}\Delta s, \tag{5.42}$$

где k_{s1}, k_{s2} — коэффициенты обратной связи, получаем

$$\Delta\ddot{s} + (k_{s2} - a_{11}(x_1, x_2))\Delta\dot{s} + k_{s1}\Delta s = 0.$$

Соответствующий выбор коэффициентов k_{s1}, k_{s2} , обеспечивает требуемую асимптотическую компенсацию продольной ошибки Δs .

Устранение скоростной продольной ошибки $\Delta\dot{s} = V_s^* - \dot{s}$ достигается с помощью упрощенного алгоритма

$$u_s = -a_{11}(x_1, x_2)\dot{s}^* + k_{s1}\Delta\dot{s}. \tag{5.43}$$

Таким образом, полученная система согласованного управления (рис. 5.8) содержит эталонную модель ЭМ (5.28), локальные регуляторы P^1 (5.42) (или (5.43)) и P^2 (5.39), преобразование управлений (5.36) и линеаризирующий алгоритм (5.35).

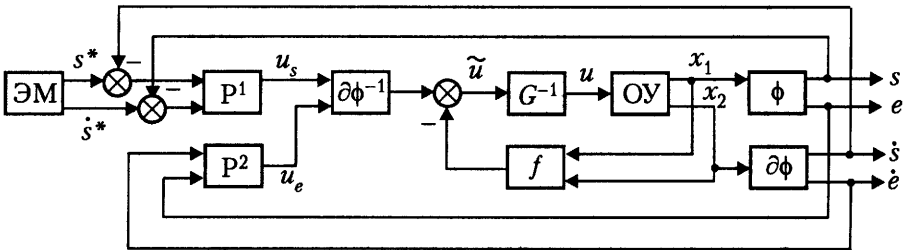


Рис. 5.8. Система согласованного управления динамической моделью

Для нормализованного описания кривой рассмотренная процедура и алгоритм управления могут быть упрощены, принимая во внимание, что матрица Якоби $\partial\phi/\partial x$ на множестве \mathcal{S}^* ортогональна и удовлетворяет уравнению Френе (см. [26, 28]). Обозначив

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = T(\alpha^*) = \begin{vmatrix} \cos \alpha^* & \sin \alpha^* \\ -\sin \alpha^* & \cos \alpha^* \end{vmatrix},$$

где матрица $T(\alpha^*)$ соответствует базису Френе, связанному с кривой S^* , а $\alpha^* = \alpha^*(y)$ — угол ориентации базиса (см. рис. 5.7), можно записать уравнение типа Френе

$$\dot{T}(\alpha^*) = \dot{s} \xi(s) ET(\alpha^*), \quad (5.44)$$

где $\xi(s)$ — кривизна,

$$E = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Пример 5.1. Нормализованное описание прямой (рис. 5.9, а) дается уравнениями

$$-\sin \alpha^* y_1 + \cos \alpha^* y_2 + \varphi_0 = 0, \quad (5.45)$$

$$s = \cos \alpha^* y_1 + \sin \alpha^* y_2 + \psi_0, \quad (5.46)$$

где α^* — угол наклона прямой; $\varphi_0 = \text{const}$, $\psi_0 = \text{const}$. С очевидностью получаем ортогональную матрицу Якоби

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = T(\alpha^*) = \begin{vmatrix} \cos \alpha^* & \sin \alpha^* \\ -\sin \alpha^* & \cos \alpha^* \end{vmatrix},$$

и в силу нулевого значения кривизны $\xi = 0$ — тривиальный случай уравнения (5.44):

$$\dot{\alpha}^* = 0.$$

□

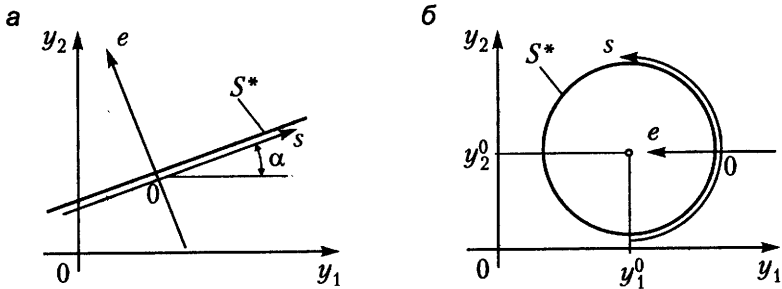


Рис. 5.9. Задачно-ориентированные координаты для типовых траекторий движения (примеры 5.1–5.2)

Пример 5.2. Пусть кривая S^* представлена отрезком (дугой) окружности радиуса R с центром в точке $y^0 = (y_1^0, y_2^0)$ (рис. 5.9, б). Для получения нормализованного представления запишем уравнение окружности в виде

$$\frac{1}{2R}(R^2 - \Delta y_1^2 - \Delta y_2^2) = 0, \quad (5.47)$$

где $\Delta y_1 = y_1 - y_1^0$, $\Delta y_2 = y_2 - y_2^0$, а длину пути определим как

$$s = R \operatorname{Arctg} \frac{\Delta y_2}{\Delta y_1}. \quad (5.48)$$

Тогда матрица Якоби при $(y_1, y_2) \in \mathcal{S}^*$ находится как

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{R} \begin{vmatrix} -\Delta y_2 & \Delta y_1 \\ -\Delta y_1 & -\Delta y_2 \end{vmatrix}$$

и ортогональна: $(\partial \phi / \partial x)^{-1} = (\partial \phi / \partial x)^T$. Кривизна \mathcal{S}^* определяется как $\xi = 1/R$. \square

Указанные соображения приводят к следующей модификации основных уравнений. Выражения (5.32), (5.33) принимают вид

$$\begin{vmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \end{vmatrix} = T(\alpha^*) x_2, \quad (5.49)$$

$$x_2 = T^T(\alpha^*) \begin{vmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \end{vmatrix}, \quad (5.50)$$

и следовательно, задачно-ориентированная модель —

$$\begin{vmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{e} \end{vmatrix} - \xi(s) \dot{s} E T(\alpha^*) \begin{vmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \end{vmatrix} = T(\alpha^*) \left(f(x_1, x_2) + G(x_1, x_2) u \right). \quad (5.51)$$

После точной линеаризации (5.35) можно выбрать преобразование управляющих воздействий

$$\tilde{u} = T^T(\alpha^*) \begin{vmatrix} u_s \\ u_e \end{vmatrix}. \quad (5.52)$$

Тогда модель (5.51) записывается как

$$\ddot{s} = \xi(s) \dot{s} \dot{e} + u_s, \quad (5.53)$$

$$\ddot{e} = -\xi(s) \dot{s}^2 + u_e. \quad (5.54)$$

Поперечное управление принимает вид

$$u_e = \xi(s) \dot{s}^2 - k_{e1} \dot{e} - k_{e2} e. \quad (5.55)$$

На кривой \mathcal{S}^* , где $e = \dot{e} = 0$, уравнение продольной динамики (5.53) имеет вид

$$\ddot{s} = u_s. \quad (5.56)$$

Принимая во внимание (5.9) и (5.28), находим

$$\Delta \ddot{s} = a_s(s^*, \dot{s}^*) - u_s. \quad (5.57)$$

Выбрав

$$u_s = a_s(s^*, \dot{s}^*) + k_{s1}\Delta\dot{s} + k_{s2}\Delta s, \quad (5.58)$$

можно гарантировать необходимую асимптотическую компенсацию продольной ошибки Δs . Устранение скоростной ошибки $\Delta\dot{s} = \dot{s}^* - \dot{s}$ обеспечивается более простым регулятором

$$u_s = k_{s1}\Delta\dot{s}. \quad (5.59)$$

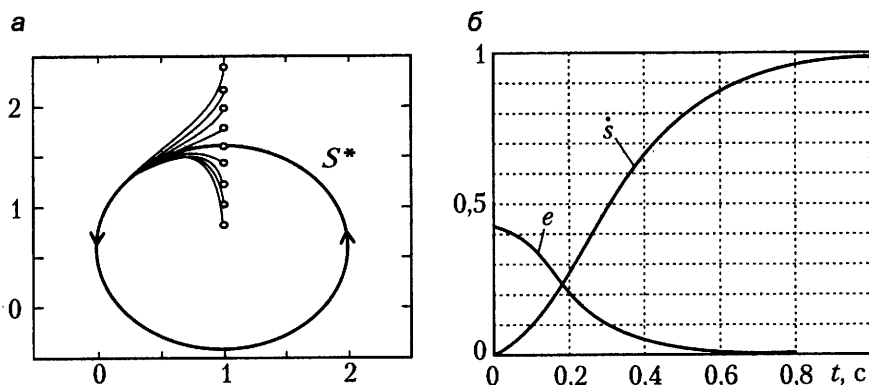


Рис. 5.10. Стабилизация кругового движения

Окончательно алгоритм управления содержит локальные регуляторы (5.58) (или (5.59)) и (5.55), преобразование управлений (5.52) и линеаризирующий алгоритм (5.35).

На рис. 5.10 представлены траектории а) и переходные процессы б) для системы траекторного управления, обеспечивающей асимптотическую стабилизацию движения относительно окружности S^* и поддержание заданной продольной скорости $V_s^* = 1$ (см. пример 5.2).

5.4. Управление движением по поверхности

В общем случае задачи согласованного и траекторного управления сводятся к задачам стабилизации движения системы относительно многомерного геометрического объекта пространства состояний — гиперповерхности, подмногообразия (см. [21, 26] и др.). В то же время проблемы стабилизации движения динамической системы относительно многомерных пространственных объектов имеют и самостоятельное значение при решении задач стабилизации выходных переменных, оптимального и качественного управления, инвариантности к возмущающим воздействиям и проч. Проблемы тесно связаны с вопросами частичной устойчивости динамических систем и аттрактивности нетривиальных геометрических объектов (см. 2.1.3 и 3.2.2).

Здесь ограничимся рассмотрением задачи стабилизации одноканального n -мерного объекта управления относительно поверхности, т. е. геометрического объекта размерности $n - 1$.

Пусть задан объект управления

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (5.60)$$

и регулярная поверхность

$$\mathcal{S}^* = \{x \in \mathcal{X} : \varphi(x) = 0\}, \quad (5.61)$$

где $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, f, g — достаточно гладкие вектор-функции, а φ — гладкая скалярная функция.

Проблема стабилизации движения по поверхности \mathcal{S}^* заключается в нахождении управляющего воздействия u , обеспечивающего инвариантность поверхности и притяжение к ней траекторий системы из некоторой окрестности $\mathcal{E}(\mathcal{S}^*)$, т. е. выполнение свойства аттрактивности (см. 2.1.3 и рис. 5.11)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t), \mathcal{S}^*) = 0. \quad (5.62)$$

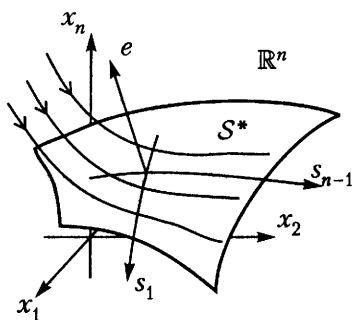


Рис. 5.11. Притягивающая поверхность

Введем в рассмотрение переменную ошибки:

$$e = \varphi(x), \quad (5.63)$$

которая характеризует текущее отклонение от поверхности или *поперечное движение* системы в пространстве \mathbb{R}^n (см. рис. 5.11). Для начальных значений x_0 , лежащих на поверхности \mathcal{S}^* , выбор управления должен обеспечить принадлежность поверхности всей траектории системы, и следовательно, $e(t) \equiv 0$. Для $x_0 \in \mathcal{E}(\mathcal{S}^*)$ требуется выполнение предельного соотношения (5.62), которое при некоторых дополнительных условиях (см. [26, 51]) совпадает с выражением

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0. \quad (5.64)$$

Таким образом, задача стабилизации движения по поверхности сводится к асимптотическому достижению нулевого значения ошибки e , т. е. к проблеме частичной устойчивости системы (см. 3.2.2).

Динамика движения системы по поверхности S^* характеризуется $n - 1$ локальной координатой $s_i(t)$ (см. рис. 5.11) или вектором продольного движения $s(t) = \{s_i(t)\}$, который определяется выражением

$$s = \psi(y), \quad (5.65)$$

где ψ — некоторая гладкая вектор-функция. Выражения (5.65), (5.63) определяют задачно-ориентированное преобразование координат системы (5.60). Условие регулярности преобразования имеет вид (см. 4.1.1)

$$\det \left| \begin{array}{c} \partial\psi/\partial x \\ \partial\varphi/\partial x \end{array} \right|_{x \in S^*} \neq 0. \quad (5.66)$$

Последнее достигается при соответствующем выборе функции ψ и обеспечивает существование гладкого обратного отображения

$$x = r(s, e). \quad (5.67)$$

Отметим, что для рассматриваемого класса объектов управления с одним входом u задача управления пространственным движением не предполагает регулирования продольной динамики системы. Более общий случай управления многоканальным объектом, включающий требования к продольному движению системы, рассмотрен в [18, 26].

Для нахождения модели отклонения продифференцируем уравнение (5.63) по времени, и подставив (5.60), получим

$$\dot{e} = \alpha(x) + \beta(x)u, \quad (5.68)$$

где

$$\alpha(x) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}f(x), \quad \beta(x) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}g(x).$$

Задача управления сводится к стабилизации полученной модели, и условием существования ее решения будет

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}g(x) \neq 0.$$

Воспользуемся приемом точной линеаризации (см. 4.2.3) и выберем линеаризирующий алгоритм

$$u = \frac{1}{\beta(x)} (-\alpha(x) + \tilde{u}), \quad (5.69)$$

где

$$\tilde{u} = -k_e e, \quad (5.70)$$

k_e — коэффициент обратной связи. Модель ошибки принимает вид

$$\dot{e} = -k_e e, \quad (5.71)$$

и выбор $k_e > 0$ обеспечивает выполнение условия аттрактивности заданной поверхности (5.64).

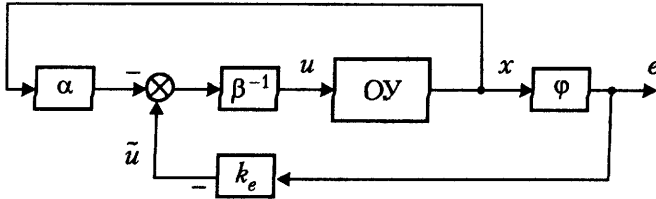


Рис. 5.12. Система управления пространственным движением

Для нахождения модели продольного движения продифференцируем уравнение (5.63) по времени, полагая, что вектор-функция ψ выбрана из условия

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} g(x) = 0. \quad (5.72)$$

Подставив (5.60), получим

$$\dot{s} = \frac{\partial \psi}{\partial x} f(x). \quad (5.73)$$

По окончании процесса стабилизации, т. е. при $e = 0$ и, следовательно, $x = r(s, 0)$, последнее выражение принимает вид

$$\dot{s} = f_s(s), \quad (5.74)$$

где

$$f_s(s) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} f(x) \right) \circ r(s, 0).$$

Пример 5.3. Рассмотрим задачу стабилизации трехмерного объекта управления

$$\dot{x}_1 = 0.1x_1 + x_2, \quad (5.75)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1, \quad (5.76)$$

$$\dot{x}_3 = 0.2u \quad (5.77)$$

относительно двумерной поверхности (параболоида, рис. 5.13)

$$S^* = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + 5x_3 = 0\}. \quad (5.78)$$

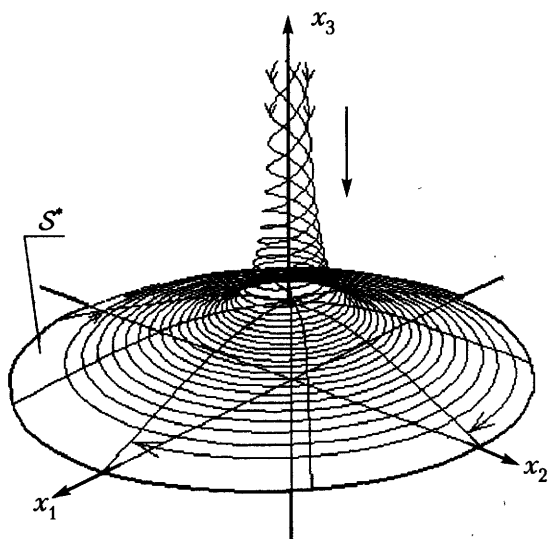


Рис. 5.13. Стабилизация движения относительно поверхности

Определим задачно-ориентированные координаты системы

$$e = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3, \quad (5.79)$$

$$s_1 = x_1, \quad (5.80)$$

$$s_2 = x_2. \quad (5.81)$$

После дифференцирования (5.79) и подстановки (5.75)–(5.77) получаем уравнение ошибки

$$\dot{e} = 0.2x_1^2 + u \quad (5.82)$$

и находим алгоритм управления

$$u = -0.2x_1^2 - k_e e. \quad (5.83)$$

При $k_e > 0$ алгоритм обеспечивает стабилизацию движения системы относительно поверхности S^* (см. рис. 5.13, где $k_e = 0.1$).

Модель продольного движения (внутренней динамики системы) получается дифференцированием уравнений (5.80)–(5.81) и после соответствующих подстановок принимает вид

$$\dot{s}_1 = 0.1s_1 + s_2, \quad (5.84)$$

$$\dot{s}_2 = -s_1. \quad (5.85)$$

Следует обратить внимание на получение расходящихся колебаний и неустойчивость внутренней динамики, что однако не оказывает влияния на решение основной задачи управления пространственным движением. \square

Глава 6. Релейные системы

Релейные системы представляют собой достаточно большой класс динамических систем, в состав которых входят нелинейные звенья с *разрывной* характеристикой (см. 1.2.1). В связи с этим к таким системам не могут быть применены рассмотренные в главах 4–5 методы анализа и синтеза *гладких* систем. Теория релейных систем является специальным разделом теории управления и представлена в работах ряда известных ученых [38, 42, 44]. Она имеет развитое научное обоснование и широкое практическое применение. Вопросы релейного управления тесно связаны с проблемами оптимизации процессов управления (см. п. 8.2).

В этом разделе мы ограничимся рассмотрением наиболее распространенного класса одноканальных систем, в состав которых входит простейшее релейное звено $\text{sign}(\cdot)$. Рассматриваются основные особенности поведения релейных систем, их свойства в скользящем режиме, затрагиваются вопросы устойчивости релейных систем, а также чувствительности скользящих режимов.

6.1. Релейные системы с нелинейным объектом управления

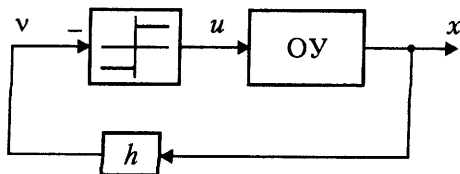


Рис. 6.1. Релейная система

Рассмотрим одноканальную динамическую систему (рис. 6.1), представленную нелинейным объектом управления (ОУ), релейным звеном и нелинейным статиче-

ским регулятором. Система описывается уравнениями

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (6.1)$$

$$u = -\text{sign } v, \quad (6.2)$$

$$v = h(x), \quad (6.3)$$

где $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, f, g — гладкие вектор-функции, а h — гладкая скалярная функция. Отметим, что разделение системы на объект, регулятор и релейный элемент условно — в частных случаях релейное звено может входить в состав как объекта управления, так и нелинейного регулятора.

Функция sign , описывающая нормированный релейный элемент, принимает два постоянных значения 1 и -1 , и ее переключение происходит при изменении знака переменной $v(t)$, т. е. при $v = 0$. Перепишем (6.2)–(6.3) в виде уравнения

$$u = -\text{sign } h(x), \quad (6.4)$$

которое показывает, что переключение управления происходит в точках пространства, удовлетворяющих уравнению

$$h(x) = 0. \quad (6.5)$$

При условии, что для любых x , удовлетворяющих (6.5), выполняется $\text{rank } h(x) = 1$, это уравнение описывает гладкую поверхность (гиперповерхность размерности $n - 1$, см. рис. 6.2 и 1.1.4.)

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{X} : h(x) = 0\},$$

а функция v характеризует текущее отклонение состояния системы от указанной поверхности. Далее будем полагать, что поверхность \mathcal{S} является однолистной и, следовательно, делит пространство состояний (или множество \mathcal{X}) на две области, в которых, как показывает уравнение (6.4), управление u сохраняет постоянный знак. Такие области называются *областями знакопостоянства* и определяются как

$$R^+ : h(x) < 0,$$

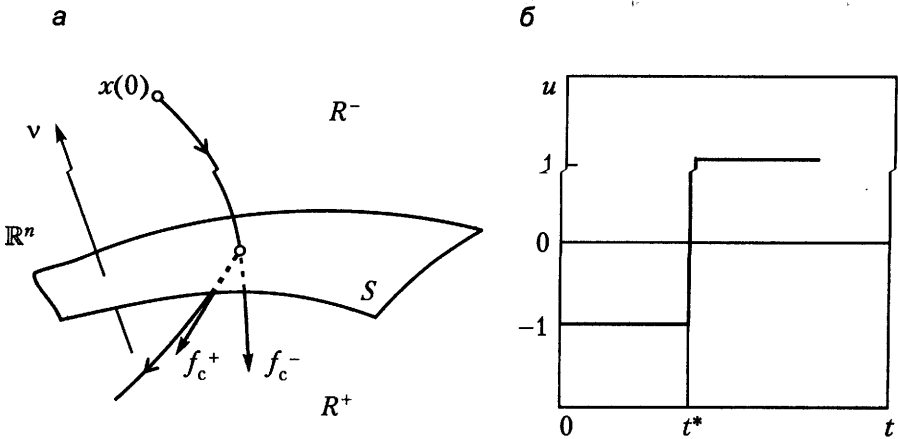
$$R^- : h(x) > 0.$$

Принимая во внимание (6.4), получим:

$$u = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in R^+, \\ -1 & \text{при } x \in R^-. \end{cases}$$

Релейная система (6.1)–(6.3) может быть представлена в виде системы переменной структуры

$$\dot{x} = f_c^\pm(x), \quad (6.6)$$

Рис. 6.2. Прохождение поверхности S и переключение управления u

где

$$f_c^\pm(x) = \begin{cases} f(x) + g(x) & \text{при } x \in R^+, \\ f(x) - g(x) & \text{при } x \in R^-. \end{cases}$$

Решениями такой динамической системы является непрерывная функция, состоящая из гладких отрезков, например (рис. 6.2),

$$x(t) = \begin{cases} x^-(t, x(0)), & \text{при } t \in [0, t^*), \\ x^+(t, x(t^*)), & \text{при } t \geq t^*, \end{cases} \quad (6.7)$$

где x^\pm — решения системы (6.6) в соответствующих областях знакопостоянства, $t = t^*$ — момент пересечения поверхности S , $x^-(t^*, x(0)) = x^+(t^*, x(t^*))$.

Таким образом, текущая структура системы (6.6) и тип участка фазовой траектории зависят от области пространства состояний, которой принадлежит текущее состояние системы, а изменение структуры и типа траектории происходит на поверхности S .

Определение 6.1. Поверхность, на которой происходит переключение структуры системы (6.6), а следовательно, и ее решений называется *поверхностью переключения*.

Проанализируем условия, при которых фазовая траектория релейной системы пересекает поверхность переключения и переходит в другую область знакопостоянства (см. рис. 6.2 и пример 6.1). Траектория пересечет S , если в момент времени $t^* - \Delta$, предшествующий переходу состояния системы из некоторой области знакопостоянства на поверхность S , вектор f_c^\pm направлен в сторону другой области знакопостоянства. При этом выполняется

$$\dot{v} \Big|_{t=t^*} \neq 0, \quad \dot{v} \Big|_{t=t^*-\Delta} < 0. \quad (6.8)$$

Для прохождения фазовой траектории из одной области знакопостоянства в другую достаточно, чтобы в момент времени $t^* + \Delta$, последующий за пересечением поверхности переключения, вектор f_c^\pm был бы направлен в ту же область знакопостоянства, что и в момент $t^* - \Delta$. Аналитически это выражается как

$$\dot{v} \Big|_{t=t^*} \neq 0, \quad \dot{v} v \Big|_{t=t^*+\Delta} > 0. \quad (6.9)$$

Отметим, что в случае нарушения неравенств (6.8)–(6.9) возможно получение участка фазовой траектории, принадлежащего поверхности переключения или ее бесконечно малой окрестности (см. пример 6.2), а также возвращение траектории в прежнюю область знакопостоянства и возникновение скользящего режима (см. п. 6.2).

Пример 6.1. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad (6.10)$$

$$u = -\text{sign } v, \quad (6.11)$$

$$v = x_1 + 0.2x_2^3. \quad (6.12)$$

Линия переключения системы S описывается уравнением

$$v = x_1 + 0.2x_2^3 = 0, \quad (6.13)$$

а области знакопостоянства —

$$R^+ : -x_1 - 0.2x_2^3 > 0, \quad R^- : -x_1 - 0.2x_2^3 < 0.$$

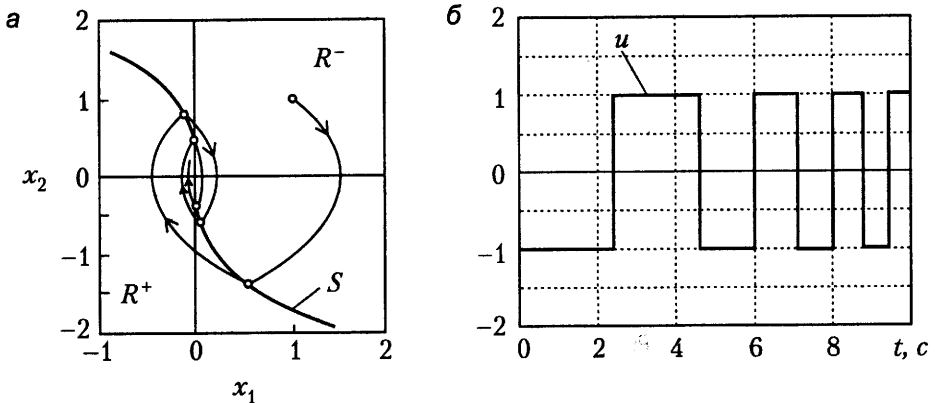


Рис. 6.3. Фазовые траектории и процессы релейной системы (пример 6.1).

Структура пространства рассматриваемой системы, фазовая траектория из точки $(1, 1)$, а также функция $u(t)$ приведены на рис. 6.3. Рисунок демонстрирует

многократное пересечение траекторией линии переключения \mathcal{S} и соответствующее переключение сигнала $u(t)$. \square

Пример 6.2. Рассмотрим релейную систему (6.10)–(6.11) с регулятором

$$v = x_1 + 0.5(\text{sign } x_2)x_2^2. \quad (6.14)$$

Линия переключения системы \mathcal{S} описывается уравнением

$$v = x_1 + 0.5(\text{sign } x_2)x_2^2 = 0, \quad (6.15)$$

а области знакопостоянства —

$$R^+ : -x_1 - 0.5(\text{sign } x_2)x_2^2 > 0, \quad R^- : -x_1 - 0.5(\text{sign } x_2)x_2^2 < 0.$$

Отметим, что участки кривой \mathcal{S} совпадают с фазовыми траекториями системы при $u = \pm 1$ (см. пример 2.5, рис. 2.3), что вызывает нарушение условия (6.9) и определяет специфику переходных процессов такой системы.

Структура пространства релейной системы, фазовые траектории из точек $x_0 = (1, 1)$ и $x_0 = (-1, -1)$, а также функция $u(t)$ при $x_0 = (1, 1)$ показаны на рис. 6.4. Отличительной особенностью поведения системы после переключения управления u является получение отрезков фазовых траекторий, проходящих вдоль линии переключения \mathcal{S} . Последнее обеспечивает достижение оптимального быстрого действия переходных процессов из произвольного начального состояния в точку $x = (0, 0)$ (см. 8.2.3). \square

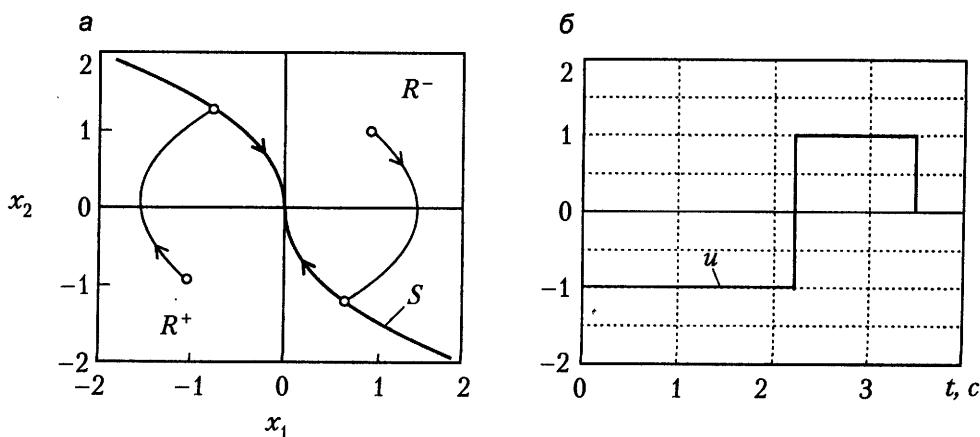


Рис. 6.4. Фазовые траектории и процессы релейной системы (пример 6.2)

6.2. Скользящий режим

На некоторых участках поверхности переключения \mathcal{S} релейные системы часто демонстрируют нетривиальное поведение — их фазовые траектории после достиже-

ния \mathcal{S} не переходят в другую область знакопостоянства, а следуют поверхности переключения (рис. 6.5). При этом наблюдаются быстрые переключения управляющего воздействия $u(t)$. Такое поведение связано с нарушением условия переключения (6.9) и служит проявлением так называемого *скользящего режима*.

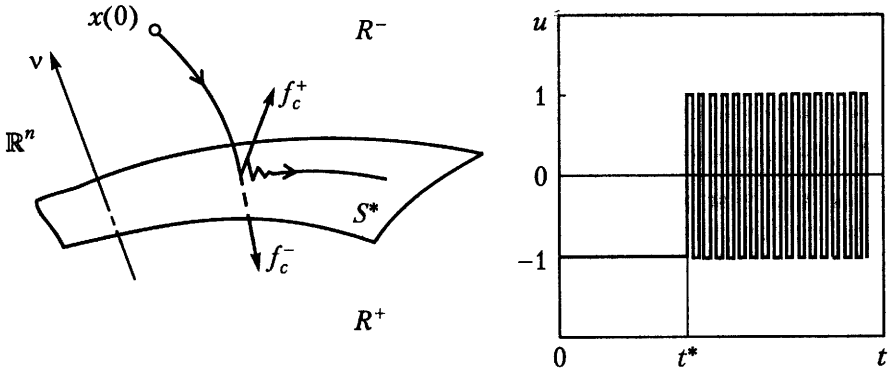


Рис. 6.5. Скользящий режим

Рассмотрим нелинейную динамическую систему (6.1)–(6.3), поверхность переключения которой описывается выражением (6.5) (см. п. 6.1). Приведем систему к виду (6.6) и проанализируем возможный сценарий поведения вектор-функции f_c^\pm в окрестности поверхности переключения.

Пусть векторы f_c^\pm в момент времени $t^* - \Delta$, предшествующий попаданию траектории системы из некоторой области знакопостоянства на поверхность \mathcal{S} , и в момент времени $t^* + \Delta$ последующий за пересечением поверхности переключения, направлены в противоположные стороны относительно этой поверхности (рис. 6.5). Если указанное явление имеет место на некотором интервале времени, то фазовая траектория системы будет представлена бесконечно короткими отрезками $x^\pm(t)$, лежащими в малой окрестности \mathcal{S} , а управление u — бесконечно короткими импульсами амплитуды ± 1 . Так как в результате такого поведения системы ее фазовая траектория не покидает рассматриваемого участка поверхности, то указанный участок приобретает свойства инвариантного множества (см. 2.1.3) и далее обозначается как \mathcal{S}^* .

Определение 6.2. Режим движения релейной системы вдоль поверхности \mathcal{S}^* , сопровождающийся бесконечно частыми переключениями управления, называется *скользящим режимом*.

Условия скользящего режима, соответствующие рассмотренной выше логике переключения вектора f_c^\pm в малой окрестности $\mathcal{E}(\mathcal{S}^*)$, записываются в виде

$$\dot{v} \Big|_{t=t^*} \neq 0, \quad \dot{v} v \Big|_{t=t^*+\Delta} < 0. \quad (6.16)$$

После дифференцирования по времени уравнения (6.3) и соответствующих подстановок неравенства (6.16) можно переписать в виде

$$\beta(x) \neq \pm\alpha(x) \quad \text{при} \quad h(x) = 0, \quad (6.17)$$

$$\beta(x) \geq (\text{sign } h(x)) \alpha(x) \quad \text{при} \quad |h(x)| = \varepsilon, \quad (6.18)$$

где $\varepsilon > 0$ — бесконечно малое число,

$$\alpha(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x), \quad \beta(x) = \frac{\partial h}{\partial x} g(x).$$

Из выражений (6.17)–(6.18) нетрудно получить следующее свойство системы в скользящем режиме:

$$\beta(x) > |\alpha(x)| \quad \text{при} \quad x \in S^*. \quad (6.19)$$

Поведение релейной системы в скользящем режиме подчиняется функциональному ограничению

$$h(x) = 0, \quad (6.20)$$

описывающему (в некоторой области пространства состояний) поверхность переключения S^* . Стандартные условия инвариантности (см. 2.1.3) позволяют найти эквивалентное аналитическое описание системы и *эквивалентное управление* \bar{u} , соответствующее среднему значению высокочастотного импульсного сигнала $u(t)$ [44].

Используя понятие эквивалентного управления, перепишем уравнение объекта (6.1) в форме

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\bar{u}. \quad (6.21)$$

Из условия инвариантности S^* , т. е.

$$\dot{v} = \frac{\partial h}{\partial x} (f + g\bar{u}) = 0,$$

получим

$$\alpha(x) + \beta(x)\bar{u} = 0. \quad (6.22)$$

Принимая во внимание, что в силу свойства (6.19) на множестве S^* выполняется $\beta(x) \neq 0$, найдем эквивалентное управление как решение уравнения (6.22):

$$\bar{u} = -\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}. \quad (6.23)$$

Отметим, что в силу (6.19) полученное эквивалентное управление удовлетворяет условию $|\bar{u}| < 1$.

В скользящем режиме динамика движения системы по поверхности S^* характеризуется $n - 1$ локальной координатой $s_i(t)$ (см. п. 5.4 и рис. 5.11) или вектором продольного движения $s(t) = \{s_i(t)\}$, который определяется выражением

$$s = \psi(x), \quad (6.24)$$

где ψ — некоторая гладкая функция. Выражения (6.3) и (6.24) определяют задачно-ориентированное преобразование координат системы (6.21). Условие регулярности преобразования имеет вид (см. 4.1.1)

$$\det \left| \frac{\partial \psi / \partial x}{\partial h / \partial x} \right|_{x \in S^*} \neq 0. \quad (6.25)$$

Последнее достигается при соответствующем выборе функции ψ и обеспечивает существование гладкого обратного отображения

$$x = r(s, v). \quad (6.26)$$

Для нахождения модели продольного движения продифференцируем уравнение (6.24) по времени, полагая, что вектор-функция ψ выбрана из условия

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} g(x) = 0. \quad (6.27)$$

После подстановки (6.21), принимая во внимание, что на поверхности переключения $x = r(s, 0)$, получим

$$\dot{s} = f_s(s), \quad (6.28)$$

где

$$f_s(s) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} f(x) \right) \circ r(s, 0).$$

При этом эквивалентное управление (6.23) принимает вид

$$\bar{u} = -\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \circ r(s, 0). \quad (6.29)$$

Замечание 6.1. Условия скользящего режима в окрестности поверхности S^* (6.17)–(6.18) имеют форму неравенств и поэтому выполняются не только для конкретных функций $f(x)$ и $g(x)$, но и при их вариациях в определенных пределах. Из этого следует, что скользящий режим вдоль заданной поверхности обладает свойством инвариантности, или нечувствительности к малым функциональным, параметрическим и аддитивным возмущениям релейной системы (см. [44], 6.3.3 и пример 6.3). \square

Пример 6.3. Рассмотрим релейную систему (см. также пример 6.2)

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = bu, \quad (6.30)$$

$$u = -\text{sign } v, \quad (6.31)$$

$$v = x_1 + 0.6(\text{sign } x_2)x_2^2, \quad (6.32)$$

где b — постоянный параметр ОУ. Линия переключения системы S^* описывается уравнением

$$v = x_1 + 0.6(\text{sign } x_2)x_2^2 = 0, \quad (6.33)$$

В данном случае фазовые траектории системы при $u = \pm 1$ и $b = 1$ (см. пример 2.5) не совпадают с кривой S^* и их расположение в малой окрестности $\mathcal{E}(S^*)$ удовлетворяет условиям скользящего режима (рис. 6.6). Последнее обеспечивает получение переходных процессов, близких к оптимальным по быстродействию (см. 7.2.3).

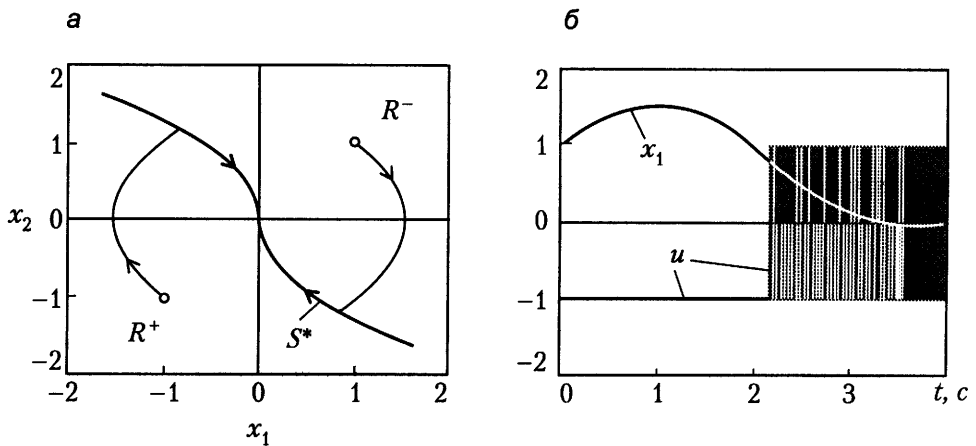


Рис. 6.6. Фазовые траектории и процессы релейной системы (пример 6.3)

Условия скользящего режима выполняются и при изменении параметра b . При $b \in (0.85, \infty)$ фазовые траектории системы после достижения линии переключения S^* остаются в малой окрестности этой кривой. Последнее свидетельствует о нечувствительности системы в скользящем режиме и обеспечивает получение переходных процессов, близких к оптимальным по быстродействию (квази-оптимальных), для различных значений параметров ОУ, например, при $b = 0.85, 1.0, 1.3, 2.0$ (рис. 6.7). \square

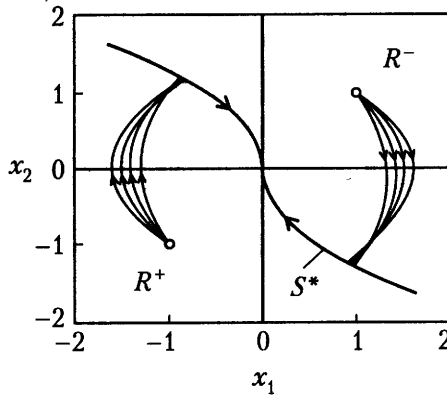


Рис. 6.7. Фазовые траектории и процессы релейной системы при изменении параметра OU (пример 6.3)

6.3. Релейные системы с линейным объектом управления

Важным частным случаем релейных систем является система с линейными объектом управления

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (6.34)$$

и регулятором

$$u = -\text{sign } v, \quad (6.35)$$

$$v = k^T x, \quad (6.36)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, k^T — матрица-строка коэффициентов обратных связей.

Переключение структуры такой системы происходит в точках, удовлетворяющих уравнению

$$k^T x = 0. \quad (6.37)$$

Последнее описывает плоскость переключения (подпространство размерности $n - 1$)

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : k^T x = 0\},$$

которая делит пространство состояния на области (полупространства) знакопостоянства сигнала u :

$$R^+ : k^T x < 0,$$

$$R^- : k^T x > 0.$$

Система может быть представлена в виде системы переменной структуры (6.6), где

$$f_c^\pm(x) = \begin{cases} Ax + b & \text{при } x \in R^+, \\ Ax - b & \text{при } x \in R^-. \end{cases}$$

6.3.1. Условия устойчивости

Для рассматриваемого класса релейных систем можно получить достаточно простые условия асимптотической устойчивости. Перепишем уравнения системы (6.34)–(6.36) в виде

$$\dot{x} = Ax - b \operatorname{sign}(k^T x). \quad (6.38)$$

Полагая $\operatorname{sign} 0 = 0$, найдем, что система имеет по крайней мере одно положение равновесия $x = 0$. Для анализа устойчивости системы относительно этого положения равновесия введем в рассмотрение квадратичную функцию Ляпунова

$$V(x) = x^T P x, \quad (6.39)$$

где $P = P^T$ — некоторая положительно определенная матрица. После дифференцирования функции Ляпунова по времени и соответствующих подстановок получим

$$\dot{V} = x^T (A^T P + P A) x - 2x^T P b (\operatorname{sign} k^T x). \quad (6.40)$$

Пусть матрица $P > 0$ является решением системы алгебраических уравнений

$$A^T P + P A = -Q, \quad (6.41)$$

$$P b = k, \quad (6.42)$$

где $Q = Q^T > 0$. Тогда уравнение (6.40) принимает вид

$$\dot{V} = -x^T Q x - 2|x^T P b|, \quad (6.43)$$

что обеспечивает $\dot{V} < 0$, и следовательно, по теореме 3.7 глобальную асимптотическую устойчивость релейной системы.

Таким образом, справедливо следующее положение.

Теорема 6.1. Релейная система (6.34)–(6.36) глобально асимптотически устойчива относительно положения равновесия $x = 0$, если для некоторой матрицы $Q > 0$ существует положительно определенная матрица P , удовлетворяющая системе уравнений (6.41)–(6.42).

Замечание 6.2. Необходимым условием существования положительно определенной матрицы P , удовлетворяющей уравнениям (6.41)–(6.42), является строгая вещественно-положительность передаточной функции

$$W(s) = k^T (sI - A)^{-1} b$$

(см. лемму Якубовича–Калмана, [26] и замечание 3.5). Последнее свойство, в частности, включает требование устойчивости матрицы A . \square

Отметим, что метод функций Ляпунова позволяет также предложить подход к синтезу регуляторов релейных систем с асимптотически устойчивым объектом. Действительно, так как по лемме Ляпунова (см. 3.1.4) для устойчивой матрицы A и произвольной матрицы $Q = Q^T > 0$ всегда найдется положительно-определенное решение P уравнения (6.41), то искомая матрица обратных связей k , обеспечивающая выполнение условий теоремы 3.7, определяется из выражения (6.42), т. е.

$$k = P b. \quad (6.44)$$

Условия теоремы 6.1, включающие устойчивость матрицы A , обычно оказываются чрезмерно жесткими — асимптотическая устойчивость релейной системы (6.34)–(6.36) часто может быть достигнута и для объектов управления, не удовлетворяющих требованию устойчивости.

Пример 6.4. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad (6.45)$$

$$u = -\text{sign } v, \quad (6.46)$$

$$v = k_1 x_1 + k_2 x_2, \quad (6.47)$$

в состав которой входит неустойчивый объект управления, релейное звено и линейный регулятор (см. также пример 2.6). Линия переключения системы S описывается уравнением

$$v = k_1 x_1 + k_2 x_2 = 0, \quad (6.48)$$

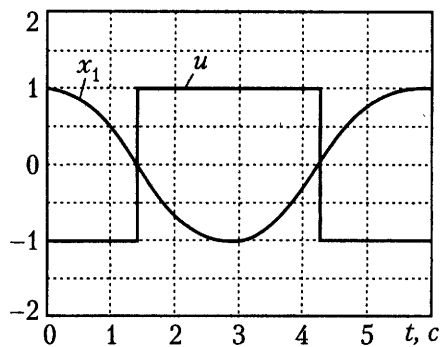
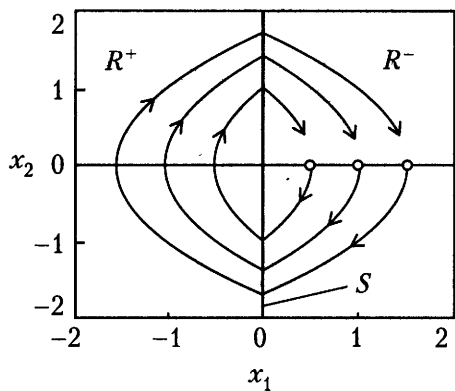
а области знакопостоянства —

$$R^+ : k_1 x_1 + k_2 x_2 < 0, \quad R^- : k_1 x_1 + k_2 x_2 > 0.$$

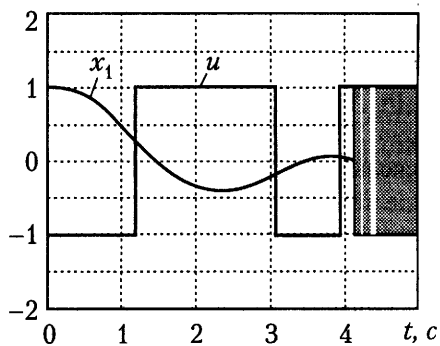
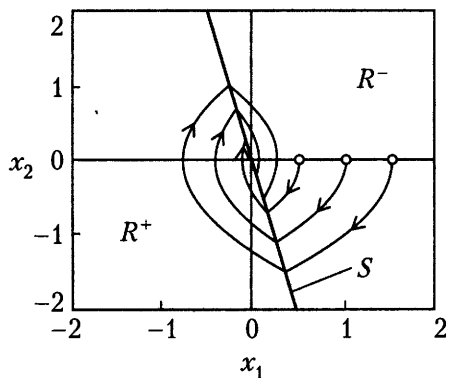
Фазовые траектории трех релейных систем, различающихся параметрами регулятора, из различных начальных состояний $x_0 = (x_{10}, 0)$, а также функции $u(t)$ и $x_1(t)$ для случая $x_0 = (1, 0)$ приведены на рис. 6.8. Рис. 6.8, а демонстрирует периодические незатухающие колебания системы с параметрами $k_1 = 1, k_2 = 0$. На рис. 6.8, б представлены процессы системы с параметрами $k_1 = 1, k_2 = 0.25$, а на рис. 6.8, в — с параметрами $k_1 = 1, k_2 = 0.5$. Наличие обратной связи по скорости $k_2 x_2$ обеспечивает получение затухающих колебательных или аperiodических процессов и, следовательно, асимптотическую устойчивость системы относительно нулевого положения равновесия.

Отметим, что на некоторых участках линий переключения S , расположенных ~~вблизи начала координат, рассмотренные системы демонстрируют движение вдоль~~ линий переключения, сопровождающееся частыми переключениями управления $u(t)$ (см. рис. 6.8, б и в), что соответствует проявлению скользящих режимов. \square

а



б



в

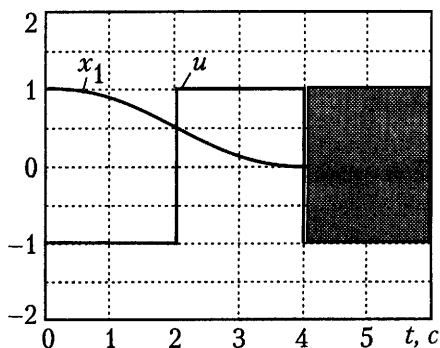
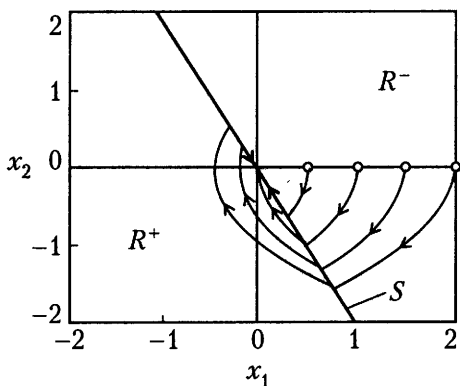


Рис. 6.8. Фазовые траектории и процессы релейных систем с различными параметрами регулятора (пример 6.4)

6.3.2. Скользящий режим и эквивалентное управление

Условия скользящего режима системы (6.34)–(6.36) в малой окрестности плоскости переключения S^* (6.37) выводятся из неравенств (6.16) и принимают вид

$$k^T b \neq \pm k^T A x \quad \text{при} \quad k^T x = 0, \quad (6.49)$$

$$k^T b > (\text{sign } k^T x) k^T A x \quad \text{при} \quad |k^T x| = \varepsilon, \quad (6.50)$$

где $\varepsilon > 0$ — бесконечно малое число. Из выражений (6.49)–(6.50) вытекает следующее свойство:

$$|k^T b| > k^T A x \Big|_{k^T x=0}. \quad (6.51)$$

Для получения эквивалентного аналитического описания системы в скользящем режиме и эквивалентного управления \bar{u} , соответствующего среднему значению $u(t)$, перепишем уравнение объекта (6.34) в форме

$$\dot{x} = Ax + b\bar{u}. \quad (6.52)$$

Используя условие инвариантности плоскости S^* , получим

$$k^T A x + k^T b \bar{u} = 0, \quad (6.53)$$

и учитывая, что в силу условия (6.51) $k^T b \neq 0$, найдем эквивалентное управление как решение уравнения (6.53):

$$\bar{u} = -(k^T b)^{-1} k^T A x. \quad (6.54)$$

После подстановки (6.54) в уравнение объекта (6.52) получим уравнение системы в скользящем режиме:

$$\dot{x} = \left(I + \frac{bk^T}{k^T b} \right) Ax. \quad (6.55)$$

Для вывода уравнения продольной динамики определим $n - 1$ -мерный вектор

$$s = \Psi^T x, \quad (6.56)$$

где Ψ — прямоугольная матрица. Условие регулярности преобразования (6.36), (6.56) имеет вид

$$\det \begin{vmatrix} \Psi^T \\ k^T \end{vmatrix} \neq 0, \quad (6.57)$$

достигается при соответствующем выборе матрицы Ψ и обеспечивает существование гладкого обратного отображения

$$x = R_s s + r_e v, \quad (6.58)$$

причем в скользящем режиме, где $v = 0$, выполняется

$$x = R_s s. \quad (6.59)$$

Для нахождения модели продольного движения в скользящем режиме продифференцируем уравнение (6.56) по времени. После подстановки (6.55) и (6.59) получим

$$\dot{s} = \Psi^T \left(I + \frac{bk^T}{k^T b} \right) AR_s s. \quad (6.60)$$

При этом формула эквивалентного управления (6.54) принимает вид

$$\bar{u} = -(k^T b)^{-1} k^T AR_s s. \quad (6.61)$$

Пример 6.5. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = b u, \quad (6.62)$$

$$u = -\text{sign } v, \quad (6.63)$$

$$v = k_1 x_1 + k_2 x_2, \quad (6.64)$$

где $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $b > 0$, и линия переключения S^* описывается уравнением (6.48). Условия скользящего движения (6.49)–(6.50) выполняются, если фазовая траектория достигает линии S^* при $|x_2| < (k_2/k_1)b^2$.

Для получения эквивалентного управления \bar{u} перепишем уравнение (6.62) в виде

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \bar{u}. \quad (6.65)$$

После дифференцирования по времени условия $v = k_1 x_1 + k_2 x_2 \equiv 0$ и подстановки (6.62) получим $k_1 x_2 + k_2 b \bar{u} = 0$ и, следовательно,

$$\bar{u} = -\frac{k_1}{k_2 b} x_2. \quad (6.66)$$

Подставляя последнее выражение в (6.62), получаем уравнение системы в скользящем режиме:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{k_1}{k_2} x_2. \quad (6.67)$$

Выберем в качестве переменной продольного движения координату x_1 , и для скользящего режима запишем

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (6.68)$$

$$x_2 = -\frac{k_1}{k_2} x_1 \quad (6.69)$$

или

$$\dot{x}_1 = -\frac{k_1}{k_2} x_1. \tag{6.70}$$

При этом эквивалентное управление (6.66) принимает вид

$$\bar{u} = -\frac{(k_1)^2}{(k_2)^2 b} x_1. \tag{6.71}$$

Решая уравнение (6.70) и используя соотношение (6.69), получаем явное описание движения системы в скользящем режиме

$$x_1 = x_{10} e^{-\frac{k_1}{k_2} t}, \tag{6.72}$$

$$x_2 = -x_{10} \frac{k_1}{k_2} e^{-\frac{k_1}{k_2} t}, \tag{6.73}$$

и подставляя (6.72) в выражение (6.71) — эквивалентное управление

$$\bar{u} = -x_{10} \frac{k_1^2}{k_2^2 b} e^{-\frac{k_1}{k_2} t}. \tag{6.74}$$

Отметим независимость скользящего движения от параметра объекта управления b .

Фазовые траектории релейной системы с параметрами $k_1 = 1, k_2 = 1.5, b =$ из различных начальных состояний $x_0 = (x_{10}, 0)$, а также функции $u(t)$ и $x_1(t)$ для случая $x_0 = (1, 0)$ приведены на рис. 6.9. Для выбранных начальных условий достаточно большое значение коэффициента k_2 гарантирует после достижения линии переключения переход системы в скользящий режим и движение вдоль этой линии в начало координат с экспоненциальным убыванием функции x_1 . □

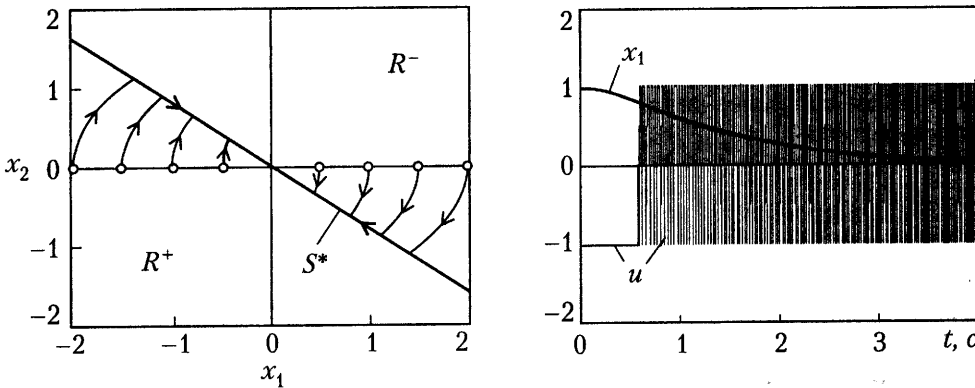


Рис. 6.9. Фазовые траектории и процессы релейной системы (пример 6.5)

6.3.3. Скользящий режим возмущенной системы

Уравнения (6.68)–(6.69) и (6.72)–(6.73), описывающие поведение в скользящем режиме системы, рассмотренной в примере 6.5, не зависят от b , что свидетельствует о нечувствительности скользящего режима к вариациям параметров объекта управления. Аналогичное явление имеет место и в более общем случае (см. также замечание 6.1).

Рассмотрим возмущенную релейную систему с линейным объектом управления и линейным регулятором:

$$\dot{x} = (A_0 + b_0 c^T)x + \gamma b u, \quad (6.75)$$

$$u = -\text{sign } v, \quad (6.76)$$

$$v = k^T x, \quad (6.77)$$

где A_0 и b_0 — номинальные значения соответствующих матриц, c и $\gamma > 0$ — постоянные или медленно меняющиеся составляющие, характеризующие вариации параметров объекта (параметрические возмущения), а плоскость переключения S^* задается выражением

$$k^T x = 0. \quad (6.78)$$

Нетрудно показать, что если номинальная система, для которой $c = 0$ и $\gamma = 1$, удовлетворяет условиям существования скользящего режима (6.49)–(6.50), то этим условиям при некоторых вариациях c и γ удовлетворяет и возмущенная система (6.75)–(6.77) (см. пример 6.3).

Аналогично для сигнально возмущенного объекта управления

$$\dot{x} = A + b(u + w), \quad (6.79)$$

где $w = w(t)$ — возмущающее воздействие, условия скольжения вдоль S^* , справедливые при $w = 0$, сохраняются и в определенном диапазоне изменения возмущения.

Пример 6.6. Рассмотрим возмущенную систему первого порядка

$$\dot{x}_1 = b(u + w), \quad (6.80)$$

$$u = -\text{sign } v, \quad (6.81)$$

$$v = x, \quad (6.82)$$

где $w = w(t)$ — сигнальное возмущающее воздействие, $b > 0$ — переменный параметр. В рассматриваемом случае множество переключения S^* вырождается в точку $x = 0$.

В отсутствие возмущения w условия скользящего движения в точке $x = 0$ всегда выполняются и не зависят от параметра b (см. рис. 6.10). При этом эквивалентное управление \bar{u} имеет нулевое значение.

Для возмущенной системы условия скользящего режима принимают вид

$$|w(t)| < 1,$$

а эквивалентное управление —

$$\bar{u} = -w(t).$$

Таким образом, рассмотренная система демонстрирует нечувствительность движения в скользящем режиме для широкого диапазона параметрических и сигнальных воздействий.

Переходные процессы возмущенной релейной системы из начального состояния $x_0 = 1$ приведены на рис. 6.10. Рис. 6.10, а демонстрирует выход системы на скользящий режим при $w = 0$ и $b = 0.5, 1.0, 5.0$, а рис. 6.10, б — при $w = 0.5 \sin 3t$ и $b = 1.0$. □

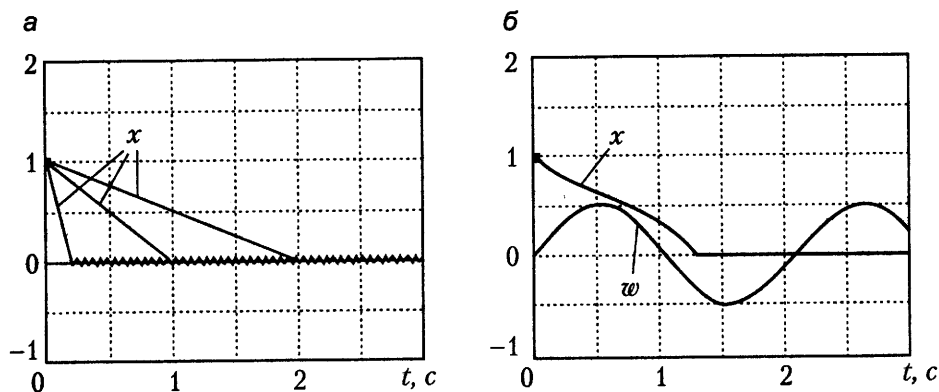


Рис. 6.10. Переходные процессы возмущенной релейной системы (пример 6.6)

Следует отметить, что несмотря на очевидные достоинства релейных систем в скользящем режиме, заключающиеся в их инвариантности к внешним воздействиям и возможности получения достаточно быстрых (например, квазиоптимальных по быстрдействию) переходных процессов, на практике такие системы обнаруживают целый ряд существенных недостатков. К последним относятся значительные энергетические потери, связанные с использованием предельно допустимых значений управляющих воздействий ± 1 , а также высокочастотные колебания переменных состояния и, как следствие, вибрация механических элементов прикладных систем управления.

Глава 7. Оптимальное управление и классические методы оптимизации

Отличительной особенностью хорошо организованной системы управления являются ее высокие качественные показатели. В стандартных задачах управления, к которым относятся задачи *стабилизации и слежения*, для оценки качества процессов, как правило, используются технические показатели — время переходного процесса, перерегулирование, затухание, установившаяся ошибка и проч. [4, 24, 31]. Последние хорошо зарекомендовали себя при оценке поведения системы в условиях незначительных отклонений от заданного режима работы (*в малом*). При больших начальных отклонениях от конечной точки движения (*в большом*), типичных для задач *терминального управления*, такие показатели, как перерегулирование, колебательность и установившаяся ошибка, характеризуют свойства системы лишь вблизи конечной точки, т. е. на последнем участке движения, в то время как основная задача заключается в организации всего процесса движения к конечной точке или к области малых отклонений. В этих условиях кардинально изменяются требования к системе управления и используемый математический аппарат:

- поведение системы *в большом*, как правило, не может быть представлено линейными (линеаризованными) моделями;
- качество процессов определяется показателями функционального типа (*функционалами*), к которым относятся затраты энергии, быстродействие и интегральные ошибки;
- возникает необходимость учета ограничивающих факторов — ограничений на управление и переменные состояния.

Все это и определяет необходимость выбора особой стратегии управления, ориентированной на достижение экстремальных значений функционалов в условиях нелинейности объектов управления и заданных ограничений.

В основе современной теории оптимального управления (см. [3, 5, 14, 15, 33, 37]) лежат методы вариационного исчисления, теории оптимизации, теории случайных процессов и классической теории автоматического управления. В связи с тем, что качество оптимизируемой системы определяется значением функционала, особую роль в теории оптимального управления детерминированными процессами играют классические методы вариационного исчисления — науки об исчислении экстремумов функционалов, развитой в работах известнейших математиков XVII–XIX столетий: И. Бернулли, И. Ньютона, Л. Эйлера, Ж. Лагранжа, У. Гамильтона, К. Якоби и многих других.

В этом разделе формулируются основные задачи оптимизации динамических процессов и изучаются некоторые вопросы вариационного исчисления в их связи с методами оптимального управления нелинейными динамическими системами. Последние подробно рассматриваются в главе 8.

7.1. Задачи оптимального управления

Оптимальным называется управление, обеспечивающее достижение наилучших в смысле выбранного критерия качественных показателей системы в условиях заданных ограничений на управляющие воздействия и переменные состояния.

Важнейшую роль в проблемах оптимального управления играет корректная постановка задачи, т. е. адекватный выбор критерия качества и ограничивающих условий. С одной стороны, постановка задачи должна учитывать практические требования к синтезируемой системе, а с другой, содержать хорошо формализованный критерий оптимальности и достаточно полный перечень ограничивающих условий.

Замечание 7.1. Некорректная постановка задачи оптимального управления обычно приводит к тривиальным или вырожденным (нереализуемым) решениям. Так, задачи минимизации квадратичных ошибок (см. 8.1.1 и пример 8.1) и оптимизации быстродействия системы без учета ограничений на управляющие воздействия приводят к бесконечно большим управлениям, а задачи минимизации энергетических затрат без учета требований к быстродействию системы — к сколь угодно долгим переходным процессам. \square

Будем рассматривать многомерные нелинейные системы (объекты управления) вида

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (7.1)$$

где $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $u = \{u_j\} \in \mathbb{R}^m$ — вектор управления, f — непрерывная или кусочно-непрерывная вектор-функция. Будем полагать, что управляющие воздействия должны быть ограничены, т. е.

$$u \in \mathcal{U}, \quad (7.2)$$

где $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ — односвязная область многомерного пространства управлений. Подобные ограничения отвечают практическим соображениям и в большинстве случаев могут быть записаны в виде неравенств

$$|u_j| \leq U_0,$$

где $U_0 > 0$, определяющих в пространстве \mathbb{R}^m гиперкуб допустимых управляющих воздействий.

Будем рассматривать задачу перевода объекта управления (7.1) из некоторого начального состояния $x(0) = x_0$ в заданную конечную точку $x(t_f) = x_f$ или ее окрестность. При этом момент времени $t_f > 0$ соответствует времени окончания процесса, величина которого в общем случае может быть неизвестна или не задана. Для оценки качества системы при решении указанной задачи введем в рассмотрение *функционал качества*

$$J(x, u) = \int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t)) dt, \quad (7.3)$$

где f^0 — непрерывная скалярная функция. Тем самым каждому управлению $u(t)$ и переходному процессу $x(t)$ ставится в соответствие (обычно неотрицательное) число $J(x, u) \in \mathbb{R}^1$, являющееся обобщенной мерой качества функционирования системы, или *критерием (показателем) качества*. К таким критериям относятся:

- динамическая (интегральная квадратичная) точность

$$J = \int_0^{t_f} x^T(t) Q x(t) dt; \quad (7.4)$$

- терминальная (квадратичная) точность

$$J = x^T(t_f) P_f x(t_f); \quad (7.5)$$

- показатель затрат энергии

$$J = \int_0^{t_f} u^T(t) Q u(t) dt; \quad (7.6)$$

- показатель затрат топлива

$$J = \int_0^{t_f} \sum_1^m \rho_j |u_j(t)| dt; \quad (7.7)$$

- показатель быстродействия (затрат времени)

$$J = \int_0^{t_f} dt = t_f. \quad (7.8)$$

Замечание 7.2. Показатели (7.4)–(7.7) дают одностороннюю оценку качества системы и поэтому, как правило, по отдельности не используются (см. замечание 7.1). Тем не менее они служат для формирования более общих комбинированных критериев, таких как обобщенная квадратичная оценка, совокупный показатель затрат энергии и быстродействия и проч. (см. главу 8). □

Указанные показатели качества, а также их комбинации относятся к так называемым *функциям штрафа*, значения которых должны быть минимизированы за счет адекватного выбора стратегии управления. Последнее и составляет главное содержание *основной задачи оптимального управления*.

Задача 7.1. Найти управление $u = u^*(t)$ и переходный процесс $x = x^*(t)$ динамической системы (7.1), которые удовлетворяют ограничениям (7.2) и обеспечивают перевод системы из точки $x(0) = x_0$ в точку $x(t_f) = x_f$ (или ее окрестность) с минимальным значением функционала (7.3).

При этом значение

$$J^* = J(x^*, u^*) = \min_{x, u} J(x, u)$$

называется *оптимальным значением функционала*, а функции

$$\{x^*(t), u^*(t)\} = \arg \min_{x, u} J(x, u),$$

доставляющие оптимальное значение $J = J^*$, — *оптимальными решениями задачи (оптимальным переходным процессом и оптимальным управлением соответственно)*.

Отметим, что оптимальные решения $x = x^*(t)$ и $u = u^*(t)$ связаны между собой уравнением системы (7.1), которое при решении задачи 7.1 рассматривается как дополнительное неголономное ограничение.

Система управления, обеспечивающая получение оптимальных решений, называется оптимальной системой, а система, для которой решения задачи достаточно близки к оптимальным, называется квази- или субоптимальной.

Важно отметить, что решение задачи 7.1, т. е. нахождение соответствующих функций времени $x^*(t)$, $u^*(t)$, не указывает конструктивного пути для построения оптимальной системы управления. Наиболее очевидной является *программная реализация* управления, т. е. построение следящей системы [1, 15, 19, 24, 26], содержащей задающий блок, который и вырабатывает найденные функции времени. Сложности генерации нетривиальных зависимостей $x^*(t)$, $u^*(t)$, а также синтеза замкнутой системы программного управления определяют основной недостаток указанного подхода. В связи с этим возникает *задача синтеза алгоритма управления (регулятора)*, обеспечивающего получение оптимальных решений за счет замыкания системы по переменным состояниям.

Задача 7.2. Найти алгоритм управления (регулятор)

$$u = U(x),$$

обеспечивающий получение оптимального управляющего воздействия $u = u^*(t)$ и оптимального переходного процесса $x = x^*(t)$ системы (7.1).

Регулятор (алгоритм управления), обеспечивающий получение оптимальных процессов, называется оптимальным регулятором, а регулятор, для которого достигаются решения, близкие к оптимальным, — квази- или субоптимальным.

7.2. Экстремумы функций

В этом разделе рассматриваются вопросы нахождения минимальных и максимальных значений *функций* в простейших экстремальных задачах и задачах с дополнительными ограничениями [17]. Представленные здесь результаты являются основой методов вариационного исчисления, изучаемых в последующих разделах этой главы.

7.2.1. Основная задача

Рассмотрим непрерывную скалярную функцию

$$y = f(x),$$

определенную на интервале $x \in [a, b]$, т. е. $f \in C_{[a,b]}^0$. Задача нахождения экстремума (минимума или максимума) функции заключается в определении наибольшего или наименьшего значения $y = y^*$, которое принимает функция $f(x)$ на множестве $[a, b]$, а также аргумента $x = x^* \in [a, b]$, при котором имеет место это значение, т. е. в нахождении числовых значений

$$y^* = \min_{[a,b]} f(x)$$

и

$$x^* = \arg \min_{[a,b]} f(x).$$

На рис. 7.1 представлена непрерывная функция, минимум которой $y = y^*$ достигается в точке $x^* = x_5$.

В силу дуальности задач нахождения минимума и максимума далее будем рассматривать в основном минимумы функции $f(x)$.

Определение 7.1. Точка $x = x^*$ называется точкой *абсолютного экстремума* (минимума) функции $f(x)$, когда для любых $x \in [a, b]$, $x \neq x^*$ выполняется

$$f(x^*) < f(x). \quad (7.9)$$

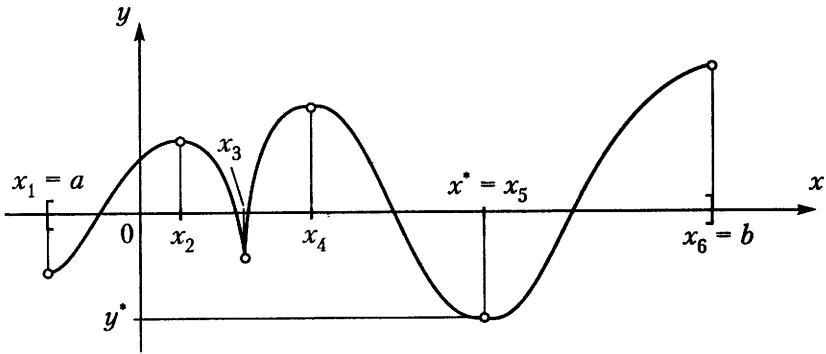


Рис. 7.1. Абсолютный минимум и точки, подозрительные на экстремум

При этом значение $y^* = f(x^*)$ называется *абсолютным экстремумом* (минимумом) функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$.

Введем в рассмотрение окрестность $\mathcal{E}(x^*) \subset [a, b]$ точки x^* .

Определение 7.2. Точка $x = x^*$ называется точкой *локального экстремума* (минимума) функции $f(x)$, когда существует окрестность $\mathcal{E}(x^*)$ такая, что для любых $x \in \mathcal{E}(x^*)$, $x \neq x^*$ выполняется условие (7.9). При этом значение $y^* = f(x^*)$ называется *локальным экстремумом* (минимумом) функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$.

Функция, представленная на рис. 7.1, имеет две точки локального минимума $x = x_3, x_5$ и абсолютный минимум в точке $x^* = x_5$.

Условие локального или абсолютного экстремума (7.9) можно записать как

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x^*) > 0, \quad (7.10)$$

где Δf — приращение функции $f(x)$.

Замечание 7.3. К точкам экстремума относятся также точки абсолютного и локального *максимумов*, для которых условия (7.9)–(7.10) принимают вид

$$f(x^*) > f(x), \quad (7.11)$$

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x^*) < 0. \quad (7.12)$$

□

Абсолютный экстремум функции может достигаться как в точках локального экстремума, так и на границах области определения $[a, b]$. В первом случае экстремум называется *внутренним*, а во втором — *граничным*.

В общем случае непрерывная функция $f(x)$ может оказаться недифференцируемой в некоторых точках x , называемых *сингулярными*. В таких точках производная

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \quad (7.13)$$

не определена. Сингулярные точки также могут доставлять функции локальный или абсолютный экстремум. Так, сингулярная точка $x = x_3$ на рис. 7.1 является точкой локального минимума.

Среди регулярных (несингулярных) точек особое значение имеют *стационарные точки* $x = x^*$, в которых производная функции $f(x)$ обращается в нуль:

$$f'(x^*) = 0. \quad (7.14)$$

Функция, представленная на рис. 7.1, имеет несколько стационарных точек, из которых $x = x_2, x_4$ являются точками локального максимума, а точка $x = x_5$ — точкой локального (и абсолютного) минимума.

С понятием стационарной точки связан один из основных методов изучения локальных экстремумов — *теорема Ферма*.

Теорема 7.1 (1-й необходимый признак). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x^*$. Тогда, если точка $x = x^*$ доставляет локальный экстремум функции, то она является стационарной точкой.

Доказательство теоремы основано на рассмотрении свойств приращения $\Delta f(x)$ в малой окрестности точки x^* . Для дифференцируемой функции $f(x)$ в малой окрестности точки x^* имеет место разложение

$$\Delta f(x) = f'(x^*)\Delta x + o(\Delta x). \quad (7.15)$$

Здесь $\Delta x = x - x^*$ — приращение аргумента,

$$d^1 f = f'(x^*)\Delta x \quad (7.16)$$

— первый дифференциал функции $f(x)$ и $o(\Delta x)/\Delta x \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. При достаточно малых Δx из условия стационарности (7.14) и формулы (7.10) следует, что первый интеграл в рассматриваемой точке обращается в нуль:

$$d^1 f(x^*) = f'(x^*)\Delta x = 0,$$

и поэтому $f'(x^*) = 0$.

Теорема предлагает только необходимые условия экстремума — из условия стационарности (7.14), вообще говоря, не следует, что точка $x = x^*$ является точкой локального экстремума. Стационарными являются также точки перегиба функции $f(x)$. Для случая дважды дифференцируемой функции, для которой существует вторая производная

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad (7.17)$$

некоторые из «лишних» стационарных точек могут быть исключены из рассмотрения с помощью следующего положения.

Теорема 7.2 (2-й необходимый признак). Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке $x = x^*$. Тогда, если точка $x = x^*$ доставляет функции локальный экстремум (минимум), то

$$f''(x^*) \geq 0. \quad (7.18)$$

Доказательство теоремы также основано на рассмотрении свойств приращения $\Delta f(x)$ в малой окрестности точки x^* и разложении:

$$\Delta f(x) = f'(x^*)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x^*)\Delta x^2 + o(\Delta x), \quad (7.19)$$

где

$$d^2 f = f''(x^*)\Delta x^2 \quad (7.20)$$

— второй дифференциал функции $f(x)$, а $d^1 f = 0$ в силу стационарности точки x^* (см. теорему 7.1).

Достаточные условия экстремума даются следующим положением.

Теорема 7.3 (достаточный признак). Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке $x = x^*$. Тогда, если выполняется

$$f'(x^*) = 0, \quad (7.21)$$

$$f''(x^*) > 0, \quad (7.22)$$

то точка $x = x^*$ доставляет функции локальный экстремум (минимум).

Отметим, что условия (7.21)–(7.22) не являются необходимыми — в ряде случаев в экстремальных точках имеет место $f''(x^*) = 0$.

Замечание 7.4. При исследовании максимумов условия (7.18), (7.22) теорем 7.2–7.3 заменяются неравенствами

$$f''(x^*) \leq 0, \quad (7.23)$$

$$f''(x^*) < 0 \quad (7.24)$$

соответственно. □

Приведенные положения касаются локальных свойств достаточно гладких функций. В общем случае для нахождения точки абсолютного экстремума можно воспользоваться простым перебором точек, подозрительных на экстремум, или так называемых *критических точек*, к которым относятся

- стационарные точки;
- граничные точки a и b ;
- сингулярные точки.

После нахождения всех критических точек x_j^* в области $[a, b]$ (для случая, когда их число конечно) следует сравнить значения $f(x_j^*)$ и выбрать среди них наименьшее:

$$y^* = \min_j f(x_j^*).$$

Точка

$$x^* = \arg \min_j f(x_j^*)$$

будет соответствовать искомой точке абсолютного минимума. Так, для функции на рис. 7.1 точками подозрительными на экстремум являются стационарные точки x_2, x_4, x_5 , граничные точки x_1, x_6 и сингулярная точка x_3 . Простым перебором нетрудно найти точку абсолютного минимума $x^* = x_5$ и минимальное значение $y^* = f(x_5)$.

Рассмотрим непрерывную скалярную функцию n переменных

$$y = f(x),$$

где $x = \{x_i\}$ — n -мерный вектор, определенный в области $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$. Задачи нахождения экстремума функции многих переменных, определения абсолютного и локальных экстремумов принципиально не отличаются от рассмотренных выше. Стационарные точки $x = x^*$ определяются как точки, в которых обращаются в нуль все частные производные рассматриваемой функции или вектор-строка

$$f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]. \quad (7.25)$$

Стационарность точки $x = x^*$ является достаточным условием локального экстремума функции многих переменных, т. е. для рассматриваемого случая остается в силе первый необходимый признак экстремума (теорема 7.1).

7.2.2. Задачи на условный экстремум

Рассмотрим непрерывную скалярную функцию n переменных $y = f(x)$ и дополнительное условие, заданное в виде неявной гладкой функции

$$g(x) = 0, \quad (7.26)$$

где $x = \{x_i\} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $f(x) \in C^0$, $g(x) \in C^1$. Выражение (7.26) в пространстве \mathbb{R}^n определяет гиперповерхность \mathcal{S} (см. 1.1.4) и является условием, ограничивающим допустимые решения задачи поиска точек экстремума функции $f(x)$.

Задача нахождения *условного экстремума* (минимума или максимума) функции $y = f(x)$ заключается в определении наибольшего или наименьшего значения $y = y^*$, которое удовлетворяет ограничению (7.26), т. е.

$$y^* = \min_{x \in \mathcal{S}} f(x),$$

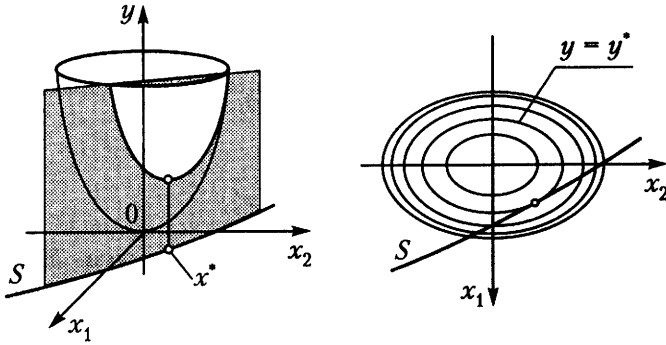


Рис. 7.2. Условный экстремум

а также аргумента $x = x^* \in [a, b]$, при котором имеет место это значение, т. е.

$$x^* = \arg \min_{x \in S} f(x)$$

(рис. 7.2).

Введем в рассмотрение *функцию Лагранжа*

$$\hat{f}(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x), \quad (7.27)$$

где λ — постоянный коэффициент, называемый *множителем Лагранжа*. Отметим, что на поверхности S , где $g(x) = 0$, значения функции \hat{f} не зависят от λ и совпадают со значениями функции $f(x)$:

$$\hat{f}(x, \lambda) \Big|_{x \in S} = f(x).$$

Справедливо следующее положение (критерий Лагранжа).

Теорема 7.4 (необходимый признак условного экстремума). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x^*$. Тогда, если точка $x = x^*$ доставляет условный локальный экстремум функции $f(x)$, то найдется значение $\lambda = \lambda^*$ такое, что точка (x^*, λ^*) является стационарной точкой функции Лагранжа $\hat{f}(x, \lambda)$.

Условия стационарности функции Лагранжа записываются как

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x} \Big|_{x=x^*, \lambda=\lambda^*} = 0, \quad (7.28)$$

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \lambda} \Big|_{x=x^*, \lambda=\lambda^*} = 0. \quad (7.29)$$

После нахождения частных производных функции (7.27) получим

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \quad (7.30)$$

$$g(x) = 0, \quad (7.31)$$

где уравнение (7.30) называется *уравнением Лагранжа*, а уравнение (7.31) повторяет ограничение (7.26). Полученная система $n + 1$ уравнения используется для нахождения значений $x = x^*$ и λ , соответствующих искомой стационарной точке.

Пример 7.1. Найдем минимум функции

$$y = a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 \quad (7.32)$$

при ограничении (условии)

$$x_1 + x_2 - C = 0, \quad (7.33)$$

где $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $C \neq 0$. Введем в рассмотрение функцию Лагранжа

$$\hat{f}(x_1, x_2, \lambda) = a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + \lambda (x_1 + x_2 - C). \quad (7.34)$$

Условия стационарности функции (7.34) представлены выражениями

$$[2a_1^2 x_1 \quad 2a_2^2 x_2] + \lambda [1 \ 1] = 0 \quad (7.35)$$

и (7.33), или в развернутом виде

$$2a_1^2 x_1 + \lambda = 0, \quad (7.36)$$

$$2a_2^2 x_2 + \lambda = 0, \quad (7.37)$$

$$x_1 + x_2 - C = 0. \quad (7.38)$$

Из этой системы уравнений находим

$$x_1^* = \frac{Ca_2^2}{a_1^2 + a_2^2}, \quad (7.39)$$

$$x_2^* = \frac{Ca_1^2}{a_1^2 + a_2^2}, \quad (7.40)$$

$$\lambda = -\frac{2Ca_1^2 a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}. \quad (7.41)$$

После подстановки в (7.32) получим значение минимума функции

$$y^* = \frac{Ca_1^2 a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}. \quad (7.42)$$

□

Результат обобщается на случай m ограничивающих условий, когда $g(x) = \{g_j\}$ в уравнении (7.26) является m -мерной вектор-функцией, и функция Лагранжа принимает вид

$$\hat{f}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x) = f(x) + \lambda^T g(x), \quad (7.43)$$

где $\lambda = \{\lambda_j\}$ — вектор постоянных коэффициентов (*множителей Лагранжа*). Условия стационарности точки (x^*, λ^*) включают векторное уравнение (7.26) и векторное уравнение Лагранжа

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda^T \frac{\partial g}{\partial x} = 0. \quad (7.44)$$

7.3. Простейшая задача вариационного исчисления

Рассмотрим множество непрерывных скалярных функций

$$y = y(x),$$

определенных на интервале $x \in [x_0, x_f]$, и функционал

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_f} F(y, y', x) dx, \quad (7.45)$$

где F — гладкая функция.

Задача нахождения минимума или максимума функционала заключается в определении функции $y = y^*(x)$ (*экстремали*), которая доставляет функционалу наименьшее или наибольшее значение (*экстремум*) $J^* = J(y^*(x))$, т. е.

$$y^*(x) = \arg \min_{y(x)} J(y) \quad \text{или} \quad y^*(x) = \arg \max_{y(x)} J(y),$$

а также в нахождении самого экстремума

$$J(y^*) = \min_{y(x)} J(y) \quad \text{или} \quad J(y^*) = \max_{y(x)} J(y).$$

Пример 7.2. Пусть заданы точки (x_0, y_0) и (x_f, y_f) , где $x_f > x_0$. Требуется найти кривую $y = y^*(x)$, которая представляет кратчайший путь между точками, а также определить наименьшее расстояние между точками при движении по этой кривой $l = l^*$.

Для произвольной гладкой кривой $y = y(x)$ расстояние определяется формулой

$$l(y) = \int_{x_0}^{x_f} \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad (7.46)$$

где $y' = dy/dx$. Поэтому задача сводится к нахождению функции $y(x)$ (*экстремали*), на которой обеспечивается минимальное значение функционала (7.46), а также значения функционала для найденной функции. \square

Пример 7.3 (задача о брахистохроне). Пусть точки O с координатами $(x_0, y_0) = (0, 0)$ и A с координатами (x_f, y_f) принадлежат плоской кривой $y = y(x)$, по которой под действием силы тяжести mg скатывается материальная точка массы m (рис. 7.3).

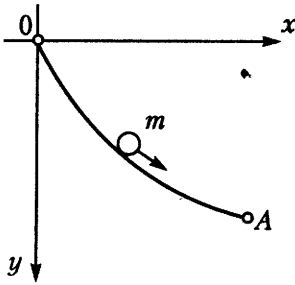


Рис. 7.3. Брахистохрона

Требуется отыскать кривую $y = y^*(x)$, при движении по которой достигается минимальное время t_f перемещения из точки 0 в точку A, а также найти оптимальное значение времени t_f^* . Указанная кривая называется *брахистохронной*.

Время перемещения точки по наклонной кривой $y = y(x)$ определяется выражением

$$t_f(y) = \int_{x_0}^{x_f} \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2gy}} dx, \quad (7.47)$$

и поэтому задача сводится к нахождению экстремали $y = y^*(x)$, на которой обеспечивается минимальное значение функционала (7.47), а также к определению значения функционала t_f для найденной функции. \square

Далее будем рассматривать задачи нахождения *минимума* функционала $J(y)$.

Определение 7.3. Функция $y = y^*(x)$ называется *абсолютным минимумом* (экстремалью) функционала $J(y)$, когда для любых $y \in C^1$, $y(x) \neq y^*(x)$, $x \in [x_0, x_f]$, выполняется

$$J(y) - J(y^*) > 0. \quad (7.48)$$

При этом значение $J^* = J(y^*) = \min_{y(x)} J(y)$ называется *абсолютным экстремумом* (минимумом) функционала $J(y)$.

Введем в рассмотрение окрестность $\mathcal{E}(y^*(x))$ функции $y^*(x)$, т. е. некоторое множество гладких функций $y(x)$, достаточно близких к $y^*(x)$. Отметим, что принято различать слабые и сильные окрестности [3, 13].

Определение 7.4. Функция $y = y^*(x)$ называется *локальным минимумом* (локальной экстремалью) функционала $J(y)$, когда для любых функций $y(x) \in \mathcal{E}(y^*(x))$, $y(x) \neq y^*(x)$, $x \in [x_0, x_f]$, выполняется условие (7.48).

При этом значение $J^* = J(y^*) = \min_{y(x) \in \mathcal{E}} J(y)$ называется *локальным экстремумом* (минимумом) функционала $J(y)$.

Так называемая *простейшая задача вариационного исчисления* формулируется как задача нахождения локальной или абсолютной экстремали $y = y^*(x)$ (рис. 7.4), т. е. функции, которая

а) доставляет функционалу $J(y)$ наименьшее значение

$$J^* = J(y^*(x)) = \min_{y(x)} J(y);$$

б) проходит через заданные краевые точки

$$y^*(x_0) = y_0, \quad y^*(x_f) = y_f.$$

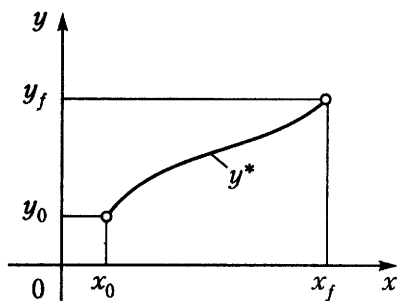


Рис. 7.4. Экстремаль

7.3.1. Вариации функционалов и основные теоремы

Пусть функция $y = y^*(x)$ — искомое решение простейшей вариационной задачи, а функция $y = y(x)$ — произвольная гладкая функция, проходящая через заданные краевые точки:

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_f) = y_f$$

(рис. 7.5). Тогда можно записать

$$y(x) = y^*(x) + \delta y, \quad (7.49)$$

где δy — вариация функции $y(x)$ с краевыми значениями $\delta y(x_0) = \delta y(x_f) = 0$.

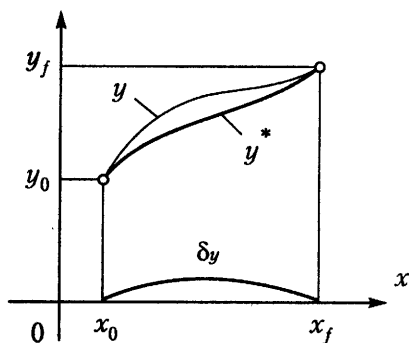


Рис. 7.5. Вариация экстремали

Рассмотрим значения функционала (7.45) для функций $y^*(x)$ и $y(x)$ соответственно:

$$J(y^*) = \int_{x_0}^{x_f} F(y^*, y^{*\prime}, x) dx, \quad (7.50)$$

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_f} F(y^* + \delta y, y^{*\prime} + \delta y', x) dx. \quad (7.51)$$

Нетрудно получить следующее разложение функционала (7.51) в малой окрестности решения $y^*(x)$:

$$J(y) = J(y^*) + \delta^1 J \Big|_{y=y^*} + \frac{1}{2} \delta^2 J \Big|_{y=y^*} + o(\delta y). \quad (7.52)$$

Здесь $\delta^1 J$ — первая вариация функционала:

$$\delta^1 J = \int_{x_0}^{x_f} (F_y^* \delta y + F_{y'}^* \delta y') dx, \quad (7.53)$$

$\delta^2 J$ — вторая вариация функционала:

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_f} (F_{yy}^* \delta y^2 + 2F_{yy'}^* \delta y \delta y' + F_{y'y'}^* \delta y'^2) dx; \quad (7.54)$$

$$F_y^* = dF/dy \Big|_{y=y^*}, \quad F_{y'}^* = dF/dy' \Big|_{y=y^*}, \quad F_{yy}^* = d^2 F/dy^2 \Big|_{y=y^*},$$

$$F_{yy'}^* = d/dy' (dF/dy) \Big|_{y=y^*}, \quad F_{y'y'}^* = d^2 F/dy'^2 \Big|_{y=y^*}.$$

Из формулы (7.52) получим приближенное выражение для приращения функционала при малых вариациях функции $y(x)$:

$$\Delta J(y) = J(y) - J(y^*) \cong \delta^1 J + \frac{1}{2} \delta^2 J, \quad (7.55)$$

что дает возможность записать условие минимума функционала (7.45) в вариациях:

$$\delta^1 J + \frac{1}{2} \delta^2 J > 0. \quad (7.56)$$

Последнее выражение является основой следующих признаков локального экстремума.

Теорема 7.5 (1-й необходимый признак экстремума). Пусть функционал (7.45) при $y = y^*(x)$ имеет первую вариацию $\delta^1 J$. Тогда, если функция $y = y^*(x)$ является локальной экстремалью, то она является стационарным решением, т. е. удовлетворяет условию

$$\delta^1 J \Big|_{y=y^*(x)} = 0. \quad (7.57)$$

Теорема предлагает только необходимые условия экстремума — из условия стационарности (7.57), вообще говоря, не следует, что функция $y = y^*(x)$ является локальной экстремалью. При условии, что существует вторая вариация $\delta^2 J$ функционала (7.45), некоторые из «лишних» стационарных решений могут быть исключены из рассмотрения с помощью следующего положения.

Теорема 7.6 (2-й необходимый признак минимума). Пусть функционал (7.45) при $y = y^*(x)$ имеет вторую вариацию $\delta^2 J$. Тогда, если функция $y = y^*(x)$ является локальной экстремалью, то она удовлетворяет условию

$$\delta^2 J \Big|_{y=y^*(x)} \geq 0. \quad (7.58)$$

Достаточные условия минимума даются следующим положением.

Теорема 7.7 (достаточный признак минимума). Пусть функционал (7.45) при $y = y^*(x)$ имеет первую и вторую вариации. Тогда, если выполняется

$$\delta^1 J \Big|_{y=y^*(x)} = 0, \quad (7.59)$$

$$\delta^2 J \Big|_{y=y^*(x)} \geq k|\delta y|^2, \quad (7.60)$$

где $k > 0$, то функция $y = y^*(x)$ является локальной экстремалью (минимумом).

Отметим, что условия (7.59)–(7.60) не являются необходимыми, и обратное вообще говоря не верно.

Приведенные положения касаются локальных свойств функционалов. Для нахождения абсолютного экстремума в достаточно общем случае можно воспользоваться простым перебором функций $y_j^*(x)$, подозрительных на экстремум (см. 7.2.1).

7.3.2. Параметризация задачи и уравнение Эйлера–Лагранжа

Нахождение экстремальных решений в соответствии с теоремами 7.5–7.7 связано со значительными аналитическими трудностями, обусловленными в частности тем, что их условия должны удовлетворяться для *всех* допустимых вариаций функции $y(x)$. Условия упрощаются для специального класса вариаций

$$\delta y = \alpha \eta(x), \quad (7.61)$$

где $\eta(x)$ — произвольная гладкая функция, удовлетворяющая условиям $\eta(x_0) = \eta(x_f) = 0$, α — вещественное число: $\alpha \in \mathbb{R}$. Необходимые вариации искомой

функции $y^*(x)$ обеспечиваются за счет изменения параметра α , причем при $\alpha = 0$ имеет место $y(x) = y^*(x)$. Задача минимизации функционала $J(y)$ сводится к минимизации функции одной переменной

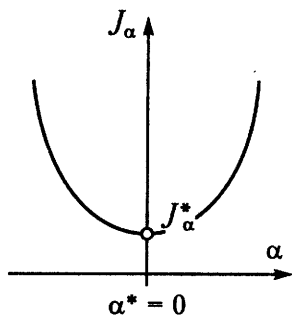


Рис. 7.6. Функция J_α

$$J_\alpha(\alpha) = J(y^*(x) + \alpha\eta(x)), \quad (7.62)$$

т. е. к нахождению числовых значений

$$\arg \min_{\alpha} J_\alpha(\alpha) = \arg \min_{y(x)} J(y), \quad (7.63)$$

где

$$y = y^* + \alpha\eta(x).$$

Так как в силу определения функции J_α и последнего выражения имеет место

$$J_\alpha(0) = J(y^*(x)) = \min_{y(x)} J(y(x)), \quad (7.64)$$

то решение задачи нахождения точки экстремума J_α тривиально и дается значением $\alpha = 0$ (рис. 7.6). Тем не менее подход достаточно конструктивен, так как позволяет связать условия минимума функционала $J(y)$ (см. теоремы 7.5–7.7) с достаточно простыми условиями минимума функции $J_\alpha(\alpha)$ в точке $\alpha = 0$, которые даются теоремами 7.1–7.3.

Запишем разложение функции $J_\alpha(\alpha)$ в малой окрестности стационарной точки $\alpha = 0$:

$$J_\alpha(\alpha) = J_\alpha(0) + \left. \frac{dJ_\alpha}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 J_\alpha}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0} + o(\alpha) \quad (7.65)$$

и соответствующее разложение функционала $J(y)$ в малой окрестности стационарного решения $y^*(x)$ (см. (7.55)):

$$J(y) = J(y^*) + \delta^1 J \Big|_{y=y^*} + \frac{1}{2} \delta^2 J \Big|_{y=y^*} + o(y - y^*). \quad (7.66)$$

В силу определения (7.62) и свойства (7.64) в достаточно малой окрестности стационарных решений можно записать

$$\left. \frac{dJ_\alpha}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 J_\alpha}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0} \cong \delta^1 J \Big|_{y=y^*} + \frac{1}{2} \delta^2 J \Big|_{y=y^*}. \quad (7.67)$$

Последнее выражение позволяет сформулировать следующие утверждения.

Теорема 7.8. Пусть функционал (7.45) при $y = y^*(x)$ имеет первую вариацию $\delta^1 J$. Функция $y = y^*(x)$ является стационарным решением, т. е.

$$\delta^1 J \Big|_{y=y^*(x)} = 0,$$

тогда и только тогда, когда точка $\alpha = 0$ является стационарной точкой функции $J_\alpha(\alpha)$:

$$\frac{dJ_\alpha}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0.$$

Теорема 7.9. Пусть функционал (7.45) при $y = y^*(x)$ имеет вторую вариацию $\delta^2 J$. Функция $y = y^*(x)$ удовлетворяет условию

$$\delta^2 J \Big|_{y=y^*(x)} \geq 0$$

тогда и только тогда, когда точка $\alpha = 0$ удовлетворяет условию

$$\frac{d^2 J_\alpha}{d\alpha^2} \Big|_{\alpha=0} \geq 0.$$

С использованием теорем 7.8–7.9 необходимые условия локального экстремума функционала $J(y)$ (теоремы 7.5–7.6) могут быть заменены простыми условиями локального экстремума функции $J_\alpha(\alpha)$. После несложных аналитических преобразований функций $dJ_\alpha(\alpha)/d\alpha$ и $d^2J_\alpha(\alpha)/d\alpha^2$ в точке $\alpha = 0$ получаем следующую формулировку необходимых условий экстремума функционала $J(y)$.

Теорема 7.10. Пусть функционал (7.45) при $y = y^*(x)$ имеет первую вариацию $\delta^1 J$. Тогда, если функция $y = y^*(x)$ является локальной экстремалью, то она является решением уравнения Эйлера–Лагранжа

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \quad (7.68)$$

Таким образом, для нахождения решения, подозрительного на экстремум, необходимо найти частное решение $y = y^*(x)$ дифференциального уравнения второго порядка (7.68). Для получения этого решения используются краевые условия

$$y^*(x_0) = y_0, \quad y^*(x_f) = y_f. \quad (7.69)$$

Пример 7.4. Рассмотрим задачу поиска кратчайшего пути (см. пример 7.2). Здесь

$$F = \sqrt{1 + (y')^2}. \quad (7.70)$$

Так как функция F явно не зависит от y , то $F_y = 0$, и уравнение Эйлера–Лагранжа принимает вид

$$-\frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} \sqrt{1 + (y')^2} = 0. \quad (7.71)$$

После определения производных получаем

$$(1 + (y')^2)^{-1/2} y'' - (1 + (y')^2)^{-3/2} (y')^2 y'' = 0. \quad (7.72)$$

Из последнего выражения находим дифференциальное уравнение

$$y''(x) = 0, \quad (7.73)$$

решением которого является функция (прямая)

$$y = C_0 + C_1 x. \quad (7.74)$$

Здесь C_0, C_1 — постоянные коэффициенты, которые определяются из краевых условий:

$$y(x_0) = C_0 + C_1 x_0, \quad y(x_f) = C_0 + C_1 x_f. \quad (7.75)$$

В заключение определяем $y' = C_1$, и подставив в выражение (7.46), находим расстояние между точками:

$$\min_{y(x)} l(y) = \sqrt{1 + (C_1)^2} (x_f - x_0). \quad (7.76)$$

□

Теорема 7.10 предлагает только необходимые условия экстремума, и поэтому использование уравнения Эйлера–Лагранжа часто приводит к получению «лишних» решений. Для функционалов, у которых существует вторая вариация $\delta^2 J$, некоторые из таких решений могут быть исключены из рассмотрения с помощью дополнительного необходимого условия (*условия Лежандра*).

Теорема 7.11. Пусть функционал (7.45) при $y = y^*(x)$ имеет вторую вариацию $\delta^2 J$. Тогда, если функция $y = y^*(x)$ является локальной экстремалью, то она удовлетворяет условию Лежандра

$$F_{y'y'} \geq 0. \quad (7.77)$$

7.3.3. Частные случаи и обобщения

Представляет интерес частный случай простейшей задачи вариационного исчисления, когда функционал имеет вид

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_f} F(y, y') dx, \quad (7.78)$$

т. е. подинтегральное выражение F явно не зависит от аргумента x . Нетрудно получить, что в рассматриваемых случаях

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} y'' \quad (7.79)$$

и, следовательно, уравнение Эйлера–Лагранжа приводится к виду

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} y'' = 0 \quad (7.80)$$

или

$$\frac{d}{dx} \left(F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' \right) = 0. \quad (7.81)$$

Из последнего выражения следует, что функция в скобках не зависит от x , и можно записать

$$F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' = C, \quad (7.82)$$

где $C = \text{const}$ — неопределенная постоянная. Таким образом, для функционалов вида (7.78) решение вариационной задачи сводится к интегрированию дифференциального уравнения *первого порядка*.

Пример 7.5. Рассмотрим задачу о брахистохроне (см. пример 7.3). Здесь функция F определяется выражением

$$F(y, y') = \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2gy}} \quad (7.83)$$

и явно не зависит от x . Решение ищется из уравнения (7.82), которое принимает вид

$$\frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{2gy} - \frac{(y')^2}{2gy} \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C. \quad (7.84)$$

После преобразований получаем нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$2gy(1 + (y')^2) = \frac{1}{C^2}. \quad (7.85)$$

Решение уравнения может быть найдено в параметрическом виде:

$$y = \frac{1}{2C^2}(1 - \cos t), \quad x = \frac{1}{2C^2}(1 - \sin t) + C_1 \quad (7.86)$$

и представляет собой семейство циклоид. Параметры C и C_1 находятся из краевых условий $x(t_f) = x_f$ и $y(t_f) = y_f$. \square

Рассмотрим задачу нахождения экстремали $y = y^*(x)$ для функционала более общего вида

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_f} F(y, y' \dots y^{(n)}, x) dx, \quad (7.87)$$

где F — гладкая функция. Простейшая задача вариационного исчисления формулируется как задача нахождения локальной или абсолютной экстремали $y = y^*(x)$, которая доставляет функционалу $J(y)$ наименьшее значение и удовлетворяет заданным краевым условиям

$$y^{*(j)}(x_0) = y_0^{(j)}, \quad y^{*(j)}(x_f) = y_f^{(j)}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (7.88)$$

В данном случае необходимый признак экстремума формулируется следующим образом.

Теорема 7.12. Если функция $y = y^*(x)$ является локальной экстремалью функционала (7.87), то она является решением уравнения Эйлера–Пуассона

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0. \quad (7.89)$$

Отметим, что последнее уравнение имеет порядок $2n$, что соответствует числу краевых условий (7.88).

Теперь рассмотрим *векторную* функцию скалярного аргумента

$$y = y(x),$$

где $y = \{y_j\}$, $j = 1, 2, \dots, n$, и задачу нахождения экстремали $y = y^*(x)$, которая доставляет наименьшее значение функционалу

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_f} F(y, y', x) dx$$

и удовлетворяет заданным краевым условиям

$$y_j^*(x_0) = y_{0j}, \quad y_j^*(x_f) = y_{fj}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (7.90)$$

В данном случае необходимый признак экстремума содержит n дифференциальных уравнений второго порядка

$$F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y_j'} = 0 \quad (7.91)$$

или одно векторно-матричное уравнение Эйлера–Лагранжа порядка $2n$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \quad (7.92)$$

7.3.4. Задача с подвижными концами

Обычная задача минимизации функционала предусматривает нахождение экстремали $y = y^*(x)$, проходящей через заданные краевые точки y_0 и y_f . В задаче с подвижными концами такие точки заранее не известны, но заданы кривые, на которых эти точки должны располагаться (рис. 7.7).

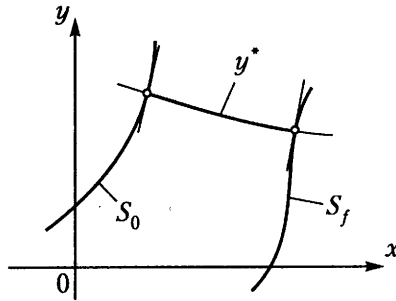


Рис. 7.7. Экстремаль в задаче с подвижными концами

Введем в рассмотрение достаточно гладкие кривые

$$S_0: \quad y = \varphi_0(x) \quad (7.93)$$

и

$$S_f: \quad y = \varphi_f(x), \quad (7.94)$$

где $\varphi_0, \varphi_f \in C^1$.

Вариационная задача с подвижными концами формулируется как задача нахождения функции $y = y^*(x)$, которая

а) доставляет функционалу (7.45) наименьшее значение

$$J^* = J(y^*(x)) = \min_{y(x)} J(y);$$

б) имеет краевые точки, лежащие на заданных кривых:

$$(x_0, y_0) \in S_0, \quad (x_f, y_f) \in S_f. \quad (7.95)$$

Необходимые условия минимума для задачи с подвижными концами даются следующей теоремой.

Теорема 7.13. Пусть функционал (7.45) при $y = y^*(x)$ имеет первую вариацию $\delta^1 J$. Тогда, если функция $y = y^*(x)$ является локальной экстремалью с краевыми условиями (7.95), то

- 1) функция $y = y^*(x)$ является решением уравнения Эйлера–Лагранжа (7.68);
 2) функция $y = y^*(x)$ в краевых точках удовлетворяет условиям трансверсальности, т. е. при $x = x_0$ выполняется

$$F + F_{y'}(\varphi'_0 - y') = 0, \quad (7.96)$$

а при $x = x_f$ —

$$F + F_{y'}(\varphi'_f - y') = 0. \quad (7.97)$$

Таким образом, для нахождения решения, подозрительного на экстремум, необходимо получить общее решение $y = y^*(x)$ дифференциального уравнения (7.68), и используя условия трансверсальности (7.96)–(7.97), найти необходимое частное решение.

Замечание 7.5. Условия трансверсальности в целом ряде частных случаев (см. пример 7.6) принимают вид

$$\varphi'_0 y' \Big|_{x=x_0} = -1, \quad (7.98)$$

$$\varphi'_f y' \Big|_{x=x_f} = -1, \quad (7.99)$$

что соответствует условиям ортогональности касательных в точках пересечения (см. рис. 7.7). Таким образом, условия трансверсальности часто заключаются в ортогональности экстремали $y = y^*(x)$ по отношению к заданным кривым S_0 и S_f . \square

Пример 7.6. Рассмотрим задачу поиска кратчайшего пути между двумя кривыми (см. также примеры 7.2, 7.4). Как показано в примере 7.4, экстремаль описывается уравнением

$$y = C_0 + C_1 x, \quad (7.100)$$

где C_0, C_1 — неопределенные параметры, которые обычно находятся из условий

$$y(x_0) = C_0 + C_1 x_0, \quad y(x_f) = C_0 + C_1 x_f. \quad (7.101)$$

В рассматриваемой задаче начальные и конечные значения экстремали не заданы, а лежат на заданных кривых. Поэтому значения $x_0 = x(0)$, y_0 , x_f , $y_f = y(x_f)$ в выражении (7.101) должны быть найдены из условий трансверсальности.

Так как функция F описывается уравнением (7.70), то

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}. \quad (7.102)$$

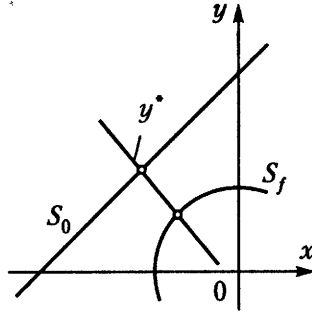


Рис. 7.8. Наикратчайшее расстояние между кривыми (пример 7.6)

Подставляя (7.70) и (7.102) в (7.96)–(7.97), получаем условия трансверсальности в виде (7.98)–(7.99), т. е. условия ортогональности касательных.

Пусть заданы (рис. 7.8) прямая

$$S_0: y = k_1x + k_0$$

и ближайший к ней отрезок окружности

$$S_f: y = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

В точках пересечения с экстремалью $y = y^*(x)$ выполняется:

$$y_0 = k_1x_0 + k_0, \quad y_f = \sqrt{R^2 - x_f^2}. \quad (7.103)$$

Теперь найдем функции y' , φ'_0 , φ'_f и их значения в краевых точках:

$$y' = C_1, \quad (7.104)$$

$$\varphi'_0 = k_1, \quad (7.105)$$

$$\varphi'_f = \frac{x}{\sqrt{(R^2 - x_f^2)^3}}, \quad (7.106)$$

и перепишем условия (7.98)–(7.99) в виде

$$k_1C_1 = -1, \quad \frac{C_1x_f}{\sqrt{(R^2 - x_f^2)^3}} = -1. \quad (7.107)$$

Таким образом, получены 3 пары алгебраических уравнений (7.101), (7.103) (7.107), из которых определяются 6 неопределенных параметров: x_0 , x_f , y_0 , y_f , C_0 , C_1 . Подстановка C_0 , C_1 в (7.100) дает уравнение искомой экстремали, а подстановка значений x_0 , x_f , C_1 в выражение (7.76) — минимальное расстояние между кривыми. \square

7.4. Задачи на условный экстремум

В отличие от простейшей задачи вариационного исчисления в задачах на условный экстремум рассматриваются векторные функции, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям — ограничениям типа равенств:

7.4.1. Задача Лагранжа

Рассмотрим функционал

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_f} F(y, y', x) dx, \quad (7.108)$$

где $y(x) \in \mathbb{R}^n$ — непрерывная векторная функция скалярного аргумента x , и введем k дополнительных *голономных* ограничений (связей переменных y и x), заданных в виде

$$g_j(y, x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (7.109)$$

где $k < n$. Ограничения могут быть записаны в векторной форме

$$g(y, x) = 0, \quad (7.110)$$

где $g = \{g_j\}$, и определяют гиперповерхность $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (рис. 7.9). Будем полагать, что вектор-функция g удовлетворяет условию регулярности

$$\text{rank} \frac{\partial g(y, x)}{\partial y} = k. \quad (7.111)$$

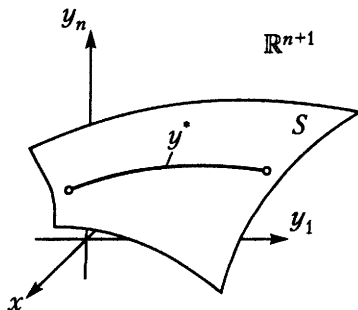


Рис. 7.9. Экстремаль в задаче на условный экстремум

Задача Лагранжа формулируется как задача нахождения *условной экстремали* $y = y^*(x)$, т. е. функции, которая

а) доставляет функционалу (7.108) наименьшее значение

$$J^* = J(y^*(x)) = \min_{y(x)} J(y);$$

б) удовлетворяет ограничениям (7.109);

в) проходит через заданные краевые точки

$$y^*(x_0) = y_0, \quad y^*(x_f) = y_f, \quad (7.112)$$

удовлетворяющие условиям

$$g(x_0, y_0) = 0, \quad g(x_f, y_f) = 0. \quad (7.113)$$

Задача сводится к простейшей задаче вариационного исчисления (см. п. 7.3).

Введем в рассмотрение вектор-функцию *множителей Лагранжа* $\lambda(x) = \{\lambda_j(x)\} \in \mathbb{R}^k$, и *лагранжиан*

$$\widehat{F}(y, y', \lambda, x) = F(y, y', x) + \sum_{j=1}^k \lambda_j(x) g_j(y, x) = F(y, y', x) + \lambda^T(x) g(y, x), \quad (7.114)$$

Сформируем расширенный функционал

$$\widehat{J}(y, \lambda) = \int_{x_0}^{x_f} \widehat{F}(y, y', \lambda, x) dx. \quad (7.115)$$

Необходимые и достаточные условия экстремума функционала $J(x)$ в задаче Лагранжа даются следующей теоремой.

Теорема 7.14. Функция $y = y^*(x) \in S$ является локальной экстремалью функционала (7.108) в задаче на условный экстремум тогда и только тогда, когда существует вектор-функция $\lambda(x) \neq 0$ такая, что $y = y^*(x)$ является локальной экстремалью расширенного функционала (7.115).

Таким образом,

$$\arg \min_{y \in S} J(y) = \arg \min_{y, \lambda} \widehat{J}(y, \lambda),$$

и задача Лагранжа сводится к простейшей задаче вариационного исчисления для расширенного функционала. Последняя может быть решена с использованием пары уравнений Эйлера-Лагранжа

$$\widehat{F}_y - \frac{d}{dx} \widehat{F}_{y'} = 0, \quad (7.116)$$

$$\widehat{F}_\lambda - \frac{d}{dx} \widehat{F}_{\lambda'} = 0. \quad (7.117)$$

После подстановки (7.114) из уравнения (7.116) находим

$$F_y + \lambda^T g - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \quad (7.118)$$

а из уравнения (7.117), с учетом того, что $\widehat{F}_{\lambda'} = 0$, получаем заданное ограничение (7.110).

Полученные уравнения называются *уравнениями Лагранжа*. Среди них n дифференциальных уравнений второго порядка (выражение (7.118)) и k голономных ограничений (7.110). Система $n + k$ уравнений используется для получения n -мерной вектор-функции $y(x)$ и k -мерной вектор-функции $\lambda(x)$.

Рассмотренная задача на условный экстремум обобщается на случай *неголономных* ограничений, т. е. ограничений вида

$$g_j(y, y', x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (7.119)$$

или, в компактной форме —

$$g(y, y', x) = 0, \quad (7.120)$$

где вектор-функция g удовлетворяет условиям регулярности (7.111) и

$$\text{rank} \frac{\partial g(y, y', x)}{\partial y'} = k. \quad (7.121)$$

В этом случае из уравнения (7.116) находим выражение

$$F_y + \lambda^T g_y - \frac{d}{dx} F_{y'} - \frac{d}{dx} (\lambda^T g_{y'}) = 0, \quad (7.122)$$

которое совместно с ограничением (7.120) составляет искомую систему уравнений Лагранжа.

Пример 7.7. Рассмотрим задачу синтеза оптимального управления объектом

$$\dot{x} = u, \quad (7.123)$$

где x и u — скалярные переменные состояния и управления, полагая, что $t_f = \infty$, заданы граничные условия $x(0) = x_0$, $x(\infty) = 0$ и квадратичный функционал качества

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (qx^2 + \rho u^2) dt, \quad (7.124)$$

где $q \geq 0$, $\rho > 0$. В рассматриваемом случае роль аргумента принимает переменная t , а функции — двумерный вектор $(x(t), u(t))$.

Уравнение объекта определяет неголономные ограничения, т. е. можно записать

$$g(\dot{x}, u) = \dot{x} - u = 0. \quad (7.125)$$

Тогда задача оптимального управления сводится к нахождению управления $u = u^*(t)$ и переходного процесса $x = x^*(t)$, доставляющих минимум функционалу (7.124) при ограничениях (7.125), т. е. является задачей на условный экстремум.

Введем в рассмотрение множитель Лагранжа $\lambda(t)$, лагранжиан

$$\hat{F}(x, u, \dot{x}, \lambda) = \frac{1}{2}(qx^2 + \rho u^2) + \lambda(\dot{x} - u), \quad (7.126)$$

и сформируем расширенный функционал

$$\hat{J}(x, u, \dot{x}, \lambda) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}(qx^2 + \rho u^2) + \lambda(\dot{x} - u) \right) dt. \quad (7.127)$$

Теперь, решая простейшую задачу вариационного исчисления для расширенного функционала, запишем систему уравнений Эйлера–Лагранжа (см. также 7.4.2):

$$qx - \dot{\lambda} = 0, \quad (7.128)$$

$$\rho u - \lambda = 0, \quad (7.129)$$

$$-u + \dot{x} = 0. \quad (7.130)$$

Отметим, что последнее уравнение повторяет условие (7.125) и модель объекта (7.123).

Из выражения (7.129) находим «алгоритм управления»

$$u = \frac{1}{\rho}\lambda, \quad (7.131)$$

подстановка которого в (7.130) дает уравнение объекта

$$\dot{x} = \frac{1}{\rho}\lambda, \quad (7.132)$$

а из выражения (7.128) получаем модель так называемой сопряженной системы

$$\dot{\lambda} = qx. \quad (7.133)$$

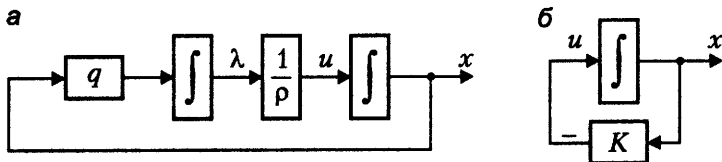


Рис. 7.10. Каноническая модель (а) и объект с пропорциональным регулятором (б)

Система уравнений (7.132)–(7.133) определяет каноническую модель оптимальной системы (рис. 7.10, а). Решениями системы являются функции $x = x^*(t)$, $\lambda = \lambda(t)$ и $u = u^*(t)$, соответствующие искомым оптимальным решениям. Задача нахождения указанных решений относится к двухточечным краевым задачам, так как для получения решений используются условие $x(0) = x_0$ на левом конце

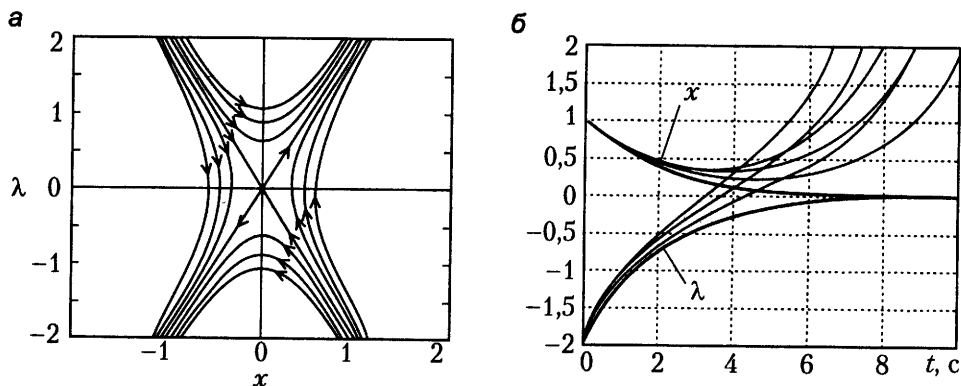


Рис. 7.11. Траектории (а) и переходные процессы (б) канонической модели

траектории и условие $x(\infty) = 0$ на правом ее конце. Для решения краевой задачи необходимо подобрать значение $\lambda(0) = \lambda_0$ такое, чтобы для заданного значения x_0 выполнялось $x(\infty) = 0$ (рис. 7.11, а). Нетрудно показать, что последнее условие всегда имеет место, если

$$\lambda_0 = -Px_0, \quad (7.134)$$

где $P = \sqrt{q\rho}$.

Графики переходных процессов для случая $q = 1$, $\rho = 4$ и различных начальных значений $\lambda(0) = \lambda_0$ представлены на рис. 7.11, б. Искомые оптимальные решения, для которых выполняется условие (7.134): $\lambda_0 = -2x_0$, и следовательно, $x(\infty) = 0$ приведены на рис. 7.12.

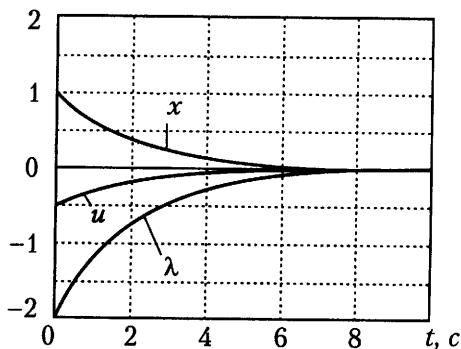


Рис. 7.12. Переходные процессы оптимальной системы

Использование канонической модели позволяет отыскать оптимальное решение в виде функций времени $x = x^*(t)$, $u = u^*(t)$ (рис. 7.12), т. е. в разомкнутом виде. Для получения решения в виде обратной связи, т. е. алгоритма замкнутого управления будем искать вектор сопряженной системы в виде

$$\lambda = -Px, \quad (7.135)$$

где $P > 0$ — число, подлежащее определению. Дифференцируя (7.135) по времени, находим

$$\dot{\lambda} = -P\dot{x}.$$

После подстановки в это выражение уравнений (7.132)–(7.133), (7.135) и простейших преобразований получаем:

$$\left(-\frac{1}{\rho}P^2 + q\right)x = 0. \quad (7.136)$$

Последнее уравнение справедливо при любых $x(t)$, если $P > 0$ является решением уравнения

$$-\frac{1}{\rho}P^2 = -q. \quad (7.137)$$

Тогда

$$P = \sqrt{q\rho}. \quad (7.138)$$

Подставляя (7.135), (7.138) в (7.131), находим пропорциональный алгоритм управления (см. рис. 7.10, б)

$$u = Kx, \quad (7.139)$$

где K — коэффициент обратной связи, рассчитываемый по формуле

$$K = -\sqrt{\frac{q}{\rho}}. \quad (7.140)$$

Уравнение оптимальной системы получается подстановкой (7.139) в (7.123) и принимает вид

$$\dot{x} = -\sqrt{\frac{q}{\rho}}x. \quad (7.141)$$

Графики управляющего воздействия $u(t)$ и переменной $x(t)$ для замкнутой оптимальной системы совпадают с решениями, полученными ранее с помощью канонической системы (см. рис. 7.12). \square

Пример 7.7 демонстрирует возможность использования классических методов оптимизации для решения простейших задач оптимального управления. Общий случай рассматривается ниже и в п. 8.1.

7.4.2. Синтез оптимального управления

Рассмотрим одноканальную нелинейную систему (объект управления)

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (7.142)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, u — скалярное управление, f — достаточно гладкая функция, и функционал качества

$$J(x, u) = \int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t)) dt. \quad (7.143)$$

Поставим следующую задачу *оптимального управления* (ср. с задачей 7.1, п. 7.1).

Задача 7.3. Найти оптимальное управление $u = u^*(t)$, обеспечивающее получение (оптимального) переходного процесса $x = x^*(t)$ объекта управления (7.142) с граничными условиями $x(0) = x_0$ и $x(t_f) = x_f$ и доставляющее минимум функционалу (7.143).

Очевидно, что задача относится к задачам на условный экстремум, в которых роль аргумента принимает переменная t , функции — $(n + 1)$ -мерный вектор $(x(t), u(t))$, а в качестве неголономного ограничения выступает уравнение объекта управления (7.142) или

$$g(x, \dot{x}, u) = \dot{x} - f(x, u) = 0. \quad (7.144)$$

Введем в рассмотрение вектор множителей Лагранжа $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$ и лагранжиан

$$\hat{f}^0(x, u, \dot{x}, \lambda) = f^0(x, u) + \lambda^T(\dot{x} - f(x, u)). \quad (7.145)$$

Сформируем расширенный функционал

$$\hat{J}(x, u, \lambda) = \int_{x_0}^{x_f} \hat{f}^0(x, u, \lambda) dx. \quad (7.146)$$

Решая простейшую задачу вариационного исчисления для расширенного функционала, выпишем уравнения Эйлера–Лагранжа по переменным x, u, λ :

$$\frac{\partial \hat{f}^0}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{f}^0}{\partial \dot{x}} = 0, \quad (7.147)$$

$$\frac{\partial \hat{f}^0}{\partial u} = 0, \quad (7.148)$$

$$\frac{\partial \hat{f}^0}{\partial \lambda} = 0. \quad (7.149)$$

Из уравнения (7.149) получим

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (7.150)$$

из уравнения (7.147) —

$$\dot{\lambda} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \lambda + \left(\frac{\partial f^0}{\partial x}\right)^T. \quad (7.151)$$

Уравнения (7.150)–(7.151) составляют так называемую *каноническую модель*, представленную моделью объекта управления и сопряженной системой (рис. 7.13).

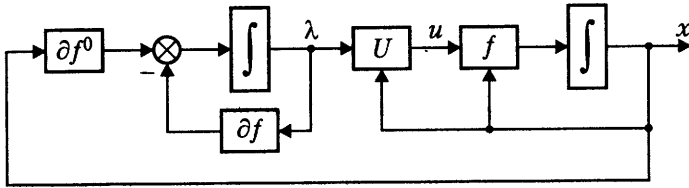


Рис. 7.13. Каноническая модель (нелинейная задача управления)

Для замыкания канонической системы необходимо определить управление u . Из уравнения (7.148) получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\partial f^0}{\partial u} - \lambda^T \frac{\partial f}{\partial u} = 0. \quad (7.152)$$

Его решение может быть найдено в виде

$$u = U(x, \lambda). \quad (7.153)$$

Таким образом, для решения задачи оптимального управления 7.3 необходимо получить частные решения системы уравнений, описывающей каноническую модель (7.150)–(7.151), (7.153), и отыскать функции $x = x^*(t)$, $u = u^*(t)$, $\lambda = \lambda(t)$, удовлетворяющие заданным граничным значениям $x(0) = x_0$ и $x(t_f) = x_f$.

Как частный случай рассмотрим линейный одноканальный объект управления (см. также пример 7.7 и п. 8.1)

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (7.154)$$

с заданными краевыми условиями $t_0 = 0$, $x(0) = x_0$, $x(\infty) = 0$, и квадратичный функционал

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T(t)Qx(t) + \rho u(t)) dt, \quad (7.155)$$

где $Q = Q^T > 0$ — матрица весовых коэффициентов, $\rho > 0$.

В рассматриваемом случае сопряженная система (7.151) принимает вид

$$\dot{\lambda} = -A^T \lambda + Qx, \quad (7.156)$$

а уравнение (7.152) —

$$\rho u - \lambda^T B = 0. \quad (7.157)$$

Из последнего выражения находим управление

$$u = \frac{1}{\rho} B^T \lambda, \quad (7.158)$$

подстановка которого в (7.154) дает уравнение объекта

$$\dot{x} = Ax + \frac{1}{\rho} BB^T \lambda. \quad (7.159)$$

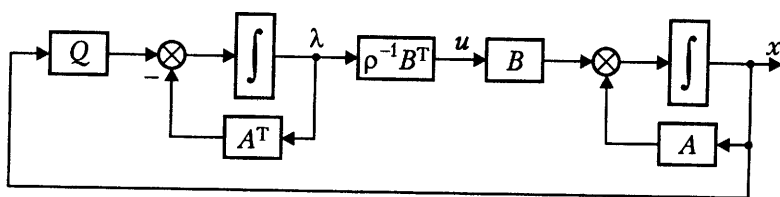


Рис. 7.14. Каноническая модель (линейная задача управления)

Таким образом, получена линейная каноническая модель, представленная объектом управления (7.159) и сопряженной системой (7.156) (рис. 7.14). Решениями системы являются функции $x = x^*(t)$, $u = u^*(t)$ и $\lambda = \lambda(t)$, соответствующие искомым оптимальным решениям. Задача нахождения этих решений относится к двухточечным краевым задачам, так как предполагает использование n краевых условий $x(0) = x_0$ на левом конце траектории и n краевых $x(\infty) = 0$ условий на правом ее конце. Последний фактор с учетом бесконечной удаленности правого конца и определяет одну из сложностей решения краевой задачи. Другая сложность заключается в неустойчивости канонической модели (7.159), (7.156) в силу неустойчивости сопряженной системы (для устойчивого объекта) либо неустойчивости самого объекта управления. Получение решений в виде функций времени также является недостатком данного подхода.

Для нахождения решения в виде алгоритма замкнутого управления (см. задачу 7.2, п. 7.1) воспользуемся следующей процедурой. Будем искать вектор сопряженной системы в виде

$$\lambda = -Px, \quad (7.160)$$

где $P = P^T > 0$ — матрица, подлежащая определению. Находим также

$$\dot{\lambda} = -P\dot{x},$$

и после подстановки в последнее выражение уравнений (7.156), (7.159)–(7.160) и простейших преобразований получаем

$$(A^T P + PA - \frac{1}{\rho} P B B^T P - Q)x = 0. \quad (7.161)$$

Последнее уравнение справедливо при любых $x = x(t)$, если матрица P является решением матричного уравнения

$$A^T P + PA - \frac{1}{\rho} P B B^T P = -Q. \quad (7.162)$$

Уравнение (7.162), часто называемое *уравнение Лурье*, относится к классу алгебраических уравнений *типа Риккати* (см. [15, 31]). Вопросы существования его решений анализируются в 8.1.3, здесь же полагаем, что искомое решение $P > 0$ существует. Тогда, подставляя (7.160) в (7.158), находим пропорциональный алгоритм управления

$$u = Kx, \quad (7.163)$$

где K — матрица-строка коэффициентов обратной связи, рассчитываемая по формуле

$$K = -\frac{1}{\rho} B^T P. \quad (7.164)$$

Уравнение оптимальной системы получается после подстановки (7.163)–(7.164) в (7.142) и принимает вид

$$\dot{x} = A_c x, \quad (7.165)$$

где

$$A_c = A - \frac{1}{\rho} B B^T P$$

— матрица замкнутой системы.

7.5. Теория Гамильтона

Представленные далее элементы теории У. Гамильтона предлагают некоторую модификацию решений задач вариационного исчисления, для которой уравнения Эйлера–Лагранжа записываются в форме элегантно системы уравнений первого порядка. Теория получила широкое распространение в механике и, кроме того, нашла отражение в одном из подходов современной теории управления — принципе максимума Л. С. Понтрягина (см. п. 8.2).

7.5.1. Каноническая модель в гамильтоновой форме

Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления (см. п. 7.4). Приведем систему уравнений Эйлера–Лагранжа (систему n дифференциальных уравнений

второго порядка) к системе уравнений первого порядка. Для этого введем в рассмотрение сопряженный вектор $p = p(x) \in \mathbb{R}^n$:

$$p(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)^T, \quad (7.166)$$

и используя уравнение Эйлера–Лагранжа (7.92), получим

$$\frac{dp}{dx} = \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^T. \quad (7.167)$$

Введем в рассмотрение функцию Гамильтона (гамильтониан)

$$H(y, p, x) = -F(y, y', x) + p^T y'. \quad (7.168)$$

Отметим, что гамильтониан не зависит от $y' = dy/dx$. Действительно,

$$\frac{\partial H}{\partial y'} = -\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)^T + p^T, \quad (7.169)$$

что в силу определения сопряженного вектора (7.167) приводит к тождеству $\partial H / \partial y' = 0$.

Найдем частные производные функции (7.168). Принимая во внимание (7.167)*, получим, что на экстремали $y = y^*(t)$ выполняется

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y} = -\left(\frac{dp}{dx} \right)^T, \quad (7.170)$$

а также

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \left(\frac{dy}{dx} \right)^T. \quad (7.171)$$

Последние два выражения приводят к искомой системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)^T, \quad (7.172)$$

$$\frac{dp}{dx} = -\left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^T, \quad (7.173)$$

которая называется канонической (гамильтониановой) системой уравнений Эйлера–Лагранжа. Решением системы является экстремаль $y = y^*(t)$, а также сопряженный вектор $p = p(t)$, что отражено в следующей формулировке.

Теорема 7.15. Если функция $y = y^*(x)$ является локальной экстремалью функционала $J(y)$, то существует вектор-функция $p = p(t) \neq 0$ такая, что $y^*(x)$, $p(t)$ являются решениями канонической системы (7.172)–(7.173).

Важным свойством функции Гамильтона для функционалов вида

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_f} F(y, y') dx, \quad (7.174)$$

где подинтегральное выражение явно не зависит от x , является ее стационарность на экстремали $y^*(x)$, т. е. свойство

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad (7.175)$$

из которого следует, что

$$H(y^*, p) = \text{const}. \quad (7.176)$$

Формулировка теоремы 7.15 остается справедливой (после замены F на \hat{F} , см. 7.4.1) и для задач на *условный экстремум*.

7.5.2. Синтез оптимального управления

Рассмотрим одноканальную нелинейную систему (7.142), функционал (7.143) и с использованием теории Гамильтона найдем решение задачи оптимального управления 7.3, сформулированной в 7.4.2.

Введем в рассмотрение вектор-функцию множителей Лагранжа $\lambda(t)$, лагранжиан

$$\hat{f}^0(x, u, \dot{x}, \lambda) = f^0(x, u) + \lambda^T(\dot{x} - f(x, u)) \quad (7.177)$$

и расширенный функционал (7.146). В 7.4.2 показано, что оптимальное решение задачи подчиняется уравнениям (7.150)–(7.152). Определим сопряженный вектор $p = p(t)$ для расширенного функционала (7.146):

$$p(x) = \left(\frac{\partial \hat{f}^0}{\partial \dot{x}} \right)^T. \quad (7.178)$$

После дифференцирования лагранжиана (7.177) по \dot{x} и сравнения с (7.178) находим

$$p(x) = \lambda(x), \quad (7.179)$$

что показывает идентичность вектора множителей Лагранжа и сопряженного вектора.

Сформируем гамильтониан

$$H(x, u, \lambda) = -\hat{f}^0(x, u, \lambda) + \lambda^T \dot{x} = -f^0(x, u) + \lambda^T f(x, u). \quad (7.180)$$

Продифференцируем функцию $H(x, u, \lambda)$ по x и λ . Учитывая уравнения канонической системы (7.150)–(7.151), получим каноническую систему в форме Гамильтона:

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)^T, \quad (7.181)$$

$$\dot{\lambda} = - \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^T. \quad (7.182)$$

С другой стороны, продифференцировав $H(x, u, \lambda)$ по u , получим

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{\partial f^0}{\partial u} + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial u}, \quad (7.183)$$

что в силу выражения (7.152) приводит к условию стационарности гамильтониана

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0. \quad (7.184)$$

Условие используется для нахождения оптимального управления в форме (7.153).

Отметим, что так как функция f^0 явно не зависит от t , то для оптимальных решений выполняется $\dot{H} = 0$ и, следовательно, —

$$H(x^*, u^*, \lambda) = \text{const}. \quad (7.185)$$

Пример 7.8. Рассмотрим задачу оптимального по критерию (7.124) управления объектом (7.123) (см. пример 7.7). Сформируем гамильтониан:

$$H(x, u, \lambda) = -\frac{q}{2}x^2 - \frac{\rho}{2}u^2 + \lambda u. \quad (7.186)$$

Каноническая система получается дифференцированием функции (7.186) по x и λ и принимает вид (7.123), (7.133). Дифференцирование по u дает выражение

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\rho u + \lambda, \quad (7.187)$$

которое по условию стационарности гамильтониана (7.184) приводит к управлению (7.131).

Нетрудно показать, что для оптимальных решений выполняется $\lambda_0 = -\sqrt{q\rho} x_0$, функция Гамильтона (7.186) постоянна и

$$H(x^*, u^*, \lambda) = 0. \quad (7.188)$$

□

Глава 8. Методы оптимального управления

Классические методы теории вариационного исчисления являются основой методов синтеза оптимальных систем, т. е. систем управления, демонстрирующих наилучшее (в смысле выбранного критерия) качество процессов. В роли критериев качества оптимальных систем выступают различные функционалы, что и связывает теорию оптимального управления с классическими методами оптимизации.

В этой главе изучаются основные методы и задачи оптимального управления, к которым относятся методы решения линейных квадратичных задач (п. 8.1), принцип максимума Л. С. Понтрягина (п. 8.2) и принцип оптимальности Р. Беллмана (п. 8.3). Следует отметить, что методы, во-первых, являются развитием тех или иных подходов классической теории оптимизации и, во-вторых, взаимосвязаны, т. е. их основные положения, как правило, могут быть получены одно из другого.

8.1. Квадратичные функционалы и линейные регуляторы

Задачи управления линейными объектами и оптимизации их поведения с использованием интегральных квадратичных функционалов относятся к классу задач *линейного квадратичного регулирования* (ЛКР). Этот класс включает наиболее распространенные и относительно простые задачи, сходные по своим формулировкам и используемым алгоритмам к задачам модального управления (см. [1, 15, 24]). Основопологающие результаты по ЛКР получены А. М. Летовым, Р. Калманом, А. А. Красовским и др.

8.1.1. Квадратичные функционалы, задачи оптимизации, линейные обратные связи

Наиболее распространенной задачей линейной теории управления является задача стабилизации многомерного объекта

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (8.1)$$

относительно положения равновесия $x = 0$. Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $x(0) = x_0$, $u \in \mathbb{R}^m$; A , B — матрицы соответствующих размерностей. Замкнутое решение задачи предполагает нахождение алгоритма управления (регулятора)

$$u = U(x), \quad (8.2)$$

который обеспечивает перевод системы (8.1) из произвольного начального состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в точку $x = 0$, т. е. обнуление с течением времени вектора $x(t)$, характеризующего отклонение от конечной точки $x = 0$.

Естественно, что решение задачи — неоднозначно, т. е. стабилизация может быть осуществлена множеством алгоритмов вида (8.2). Для уточнения задачи необходимо ввести дополнительные требования к системе, определяющие ее поведение, т. е. *критерии качества* (см. также п. 7.1).

Динамическая точность. Введем в рассмотрение показатель *динамической точности* в виде интегрального квадратичного отклонения

$$J_x = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} x^T(t) Q x(t) dt, \quad (8.3)$$

где $Q = Q^T \geq 0$ — весовая матрица, $t_f > 0$ — время окончания процесса (может быть бесконечно большим). В случае когда $Q > 0$, подынтегральное выражение функционала (8.3) можно представить в виде квадрата *взвешенной* нормы отклонения $x(t)$:

$$f_x^0(x) = x(t)^T Q x(t) = \|x(t)\|_Q^2, \quad (8.4)$$

или *мгновенной квадратичной ошибки*. Поэтому функционал (8.3) для заданного значения начального условия x_0 определяет интегральное значение квадрата нормы отклонения системы на промежутке $[0, t_f]$, и следовательно, принимает меньшие значения в тех случаях, когда переходные процессы протекают быстрее и с меньшей колебательностью. Таким образом, функционал является *штрафом за интегральную ошибку системы*.

Проанализируем решения оптимальной задачи с критерием качества (8.3). Введем в рассмотрение матрицы $P_0 = P_0^T \geq 0$ размера $n \times n$ и C размера $m \times n$ как решения системы алгебраических уравнений

$$A^T P_0 + P_0 A = -Q + C^T C, \quad (8.5)$$

$$P_0 B = 0 \quad (8.6)$$

и определим вектор $y \in \mathbb{R}^m$ — виртуальный выход системы:

$$y = Cx. \quad (8.7)$$

После подстановки (8.5)–(8.7) и (8.1) выражение (8.3) принимает вид

$$J_x = - \int_0^{t_f} \dot{x}^T P_0 x dt + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} y^T y dt.$$

Тогда в силу легко проверяемого выражения

$$\int_0^{t_f} \dot{x}^T P_0 x dt = \frac{1}{2} x^T P_0 x \Big|_{x(0)}^{x(t_f)} = \frac{1}{2} x(t_f)^T P_0 x(t_f) - \frac{1}{2} x(0)^T P_0 x(0) \quad (8.8)$$

имеет место следующее свойство критерия динамической точности.

Свойство 8.1.

$$J_x = -\frac{1}{2} x^T P_0 x \Big|_{x(t_0)}^{x(t_f)} + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} y(t)^T y(t) dt. \quad (8.9)$$

Свойство 8.1 подтверждает, что задача оптимизации управления по критерию (8.3), как правило, приводит к вырожденным решениям. Действительно, при $x(0) = x_0$ и $x(t_f) = 0$ выражение (8.9) принимает вид

$$J_x = \frac{1}{2} x_0^T P_0 x_0 + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} y(t)^T y(t) dt.$$

Формула показывает, что наименьшее значение функционала

$$J_x^* = \frac{1}{2} x_0^T P_0 x_0 \quad (8.10)$$

обеспечивается при условии, что для любых $t > 0$ виртуальный выход y имеет нулевое значение, т. е. выполняется

$$Cx = 0. \quad (8.11)$$

Последнее уравнение описывает гиперплоскость Z^* (подпространство пространства \mathbb{R}^n), являющееся в указанном случае множеством нулевой динамики (см. 3.2.2). При условии, что $\det(CB) \neq 0$, нетрудно получить управляющее воздействие, обеспечивающее выполнение тождества (8.11) при $x_0 \in Z$:

$$u = -(CB)^{-1} CAx. \quad (8.12)$$

На основании вышеизложенного можно сделать вывод, что минимальное значение J_x^* функционала (8.3) достигается, если переходный процесс имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 & \text{при } t = 0, \\ x(t) &\in Z^* & \text{при } t > 0, \end{aligned}$$

что соответствует мгновенному перемещению системы на гиперплоскость Z^* и дальнейшему движению вдоль этой гиперплоскости. Естественно, что первый этап такого процесса предполагает использование бесконечно больших управляющих сигналов, т. е. задача минимизации функционала (8.3) является вырожденной. Последнее обусловлено отсутствием в условиях задачи каких-либо ограничений на управляющее воздействие u .

Пример 8.1. Рассмотрим объект управления 2-го порядка:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (8.13)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (8.14)$$

и функционал

$$J_x = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x_1^2 + q_2 x_2^2) dt, \quad (8.15)$$

где $q_2 > 0$. Здесь $Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{vmatrix} > 0$, и система уравнений (8.5)–(8.6) имеет решения

$$P_0 = \begin{vmatrix} \sqrt{q_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad C = [1 \quad \sqrt{q_2}],$$

и следовательно,

$$J_x = \frac{\sqrt{q_2}}{2} x_{10}^2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty y^2 dt, \quad (8.16)$$

где

$$y = x_1 + \sqrt{q_2} x_2. \quad (8.17)$$

Минимум функционала (8.16) $J_x^* = (\sqrt{q_2}/2) x_{10}^2$ достигается при условии $y \equiv 0$, что соответствует движению вдоль прямой

$$Z^* : x_1 + \sqrt{q_2} x_2 = 0$$

с управляющим воздействием

$$u = -\frac{1}{\sqrt{q_2}} x_2. \quad (8.18)$$

Быстрое попадание из произвольной начальной точки (x_{10}, x_{20}) на прямую Z^* можно осуществить с помощью управления

$$u = -U_0 \operatorname{sign} y, \quad (8.19)$$

где $U_0 > 0$ — достаточно большое число. Для случая $q_2 = 0.16$ фазовые траектории, близкие к оптимальным, представлены на рис. 8.1. \square

Затраты энергии и задача терминального управления. Для постановки регулярной задачи оптимального управления и исключения решений с бесконечно

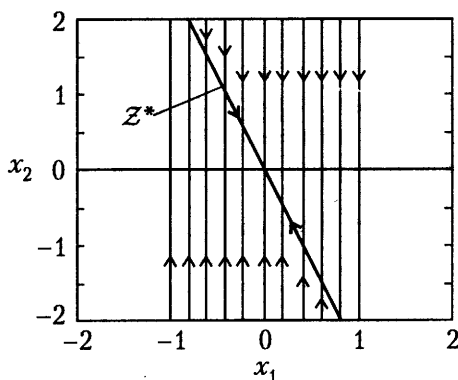


Рис. 8.1. Фазовые траектории системы, оптимальной по динамической точности (пример 8.1)

большими управлениями необходимо ввести ограничения на вектор управления u . Такие ограничения вводятся с помощью неравенств (см. п. 8.2) либо дополнительных интегральных компонент функционала качества:

$$J_u = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^T(t) R u(t) dt, \quad (8.20)$$

где $R = R^T > 0$ — весовая матрица. Интеграл (8.20) называется функционалом *затрат (потерь) энергии*. Подынтегральное выражение можно представить в виде квадрата взвешенной нормы управления $u(t)$:

$$f_u^0(u) = u(t)^T R u(t) = \|u(t)\|_R^2, \quad (8.21)$$

и поэтому функционал J_u принимает меньшие значения в тех случаях, когда требуются меньшие управляющие воздействия, т. е. является *штрафом за энергетические затраты* системы. В общем случае задача минимизации затрат энергии также является вырожденной и приводит к тривиальным решениям типа $u(t) \equiv 0$, что обусловлено отсутствием в ее условиях требований к качеству переходного процесса $x(t)$.

Будем рассматривать комбинированный критерий качества, включающий в себя интегральные квадратичные значения как отклонения $x(t)$, так и управления $u(t)$:

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)) dt. \quad (8.22)$$

В тех случаях, когда значение времени окончания процессов t_f и конечная точка $x(t_f)$ заданы, имеет место классическая постановка оптимальной задачи с закрепленным правым концом (*типа Лагранжа*), или так называемой *терминальной задачи*.

Задача 8.1. Найти оптимальный переходный процесс $x^*(t)$ и оптимальное управление $u^*(t)$, обеспечивающее за время $t_f > 0$ перевод объекта управления (8.1)

из начального состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в терминальную (конечную) точку $x(t_f) = 0$ с минимальным значением функционала (8.22), т. е. определить

$$\{x^*(t), u^*(t)\} = \arg \min_u J(x, u),$$

а также значение

$$J^* = J(x^*, u^*) = \min_u J(x, u).$$

Наибольшее распространение получили задачи терминального управления, в которых $t_f = \infty$, т. е. задачи *оптимизации на бесконечном интервале*.

Задача 8.1, а. Найти оптимальный переходный процесс $x^*(t)$ и оптимальное управление $u^*(t)$, обеспечивающее асимптотический перевод объекта управления (8.1) из начального состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в точку $x = 0$, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (8.23)$$

с минимальным значением функционала

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \right) dt. \quad (8.24)$$

*

Задачи со свободным правым концом. В тех случаях, когда терминальное значение $x(t_f)$ не задано, имеет место задача со свободным правым концом (*мина Больца*). Так как в постановке такой задачи не содержится указаний на конечное состояние системы, то минимизация функционала вида (8.22), как правило, приводит к тривиальным решениям. Для того чтобы синтезируемая система в своем движении приближалась к состоянию $x = 0$, в функционал качества необходимо ввести дополнительную компоненту вида

$$J_f(x_f) = \frac{1}{2} x^T(t_f) P_f x(t_f) = \frac{1}{2} \|x(t_f)\|_{P_f}^2, \quad (8.25)$$

где $P_f = P_f^T > 0$ — весовая матрица. Выражение (8.25) характеризует *квадратичную ошибку* системы по окончании процесса, или штраф за терминальные отклонения от точки $x = 0$.

Задача 8.2. Найти оптимальный переходный процесс $x^*(t)$ и оптимальное управление $u^*(t)$, обеспечивающее за время $t_f > 0$ перевод объекта управления (8.1) из начального состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в некоторую окрестность точки $x = 0$ с минимальным значением функционала

$$J(x, u) = \frac{1}{2} x^T(t_f) P_f x(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left(x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \right) dt. \quad (8.26)$$

Отметим, что дополнительная компонента J_f (штраф за квадратичную ошибку в конце процесса) восполняет неопределенность конечного значения $x(t_f)$ и обеспечивает приоритет переходных процессов $x(t)$, заканчивающихся в меньшей окрестности точки $x = 0$.

Задачи синтеза оптимального регулятора. Приведенные формулировки оптимальных задач предусматривают нахождение функций времени $x^*(t)$ и $u^*(t)$, т. е. получение решений в разомкнутом виде. Тем не менее решения перечисленных задач, как правило, могут быть найдены и в виде обратных связей — пропорционального регулятора отклонений.

Задача 8.3. Найти оптимальный алгоритм управления вида

$$u = Kx, \quad (8.27)$$

где $K = K(t)$ — матрица коэффициентов обратной связи, обеспечивающий для любых начальных состояний $x_0 \in \mathbb{R}^n$ получение оптимальных процессов $x^*(t)$ и управления $u^*(t)$, являющихся решениями задач 8.1 или 8.2.

В связи с тем, что минимизация интегральных *квадратичных* функционалов для *линейных* объектов управления может быть реализована с помощью *линейных* алгоритмов вида (8.27), рассматриваемые здесь оптимальные задачи принято относить к классу задач *линейного квадратичного регулирования* (ЛКР).

Замечание 8.1. Задачи ЛКР могут быть сформулированы по отношению к нестационарным объектам и функционалам качества, т. е. для случаев, когда

$$A = A(t), \quad B = B(t), \quad Q = Q(t), \quad R = R(t).$$

При этом общий подход к их решению, рассматриваемый в следующем разделе, обычно не претерпевает изменений. \square

8.1.2. Решение общей задачи ЛКР

Будем рассматривать задачи 8.1–8.3 оптимального перевода объекта управления (8.1) в точку $x(t_f) = 0$ или ее окрестность, полагая, что функционал качества задан в форме (8.26). Конечной целью приведенной ниже процедуры синтеза является получение оптимального регулятора (решение задачи 8.3), что в качестве промежуточного этапа предусматривает нахождение канонической системы (см. пример 7.7 и 7.4.2), представляющей собой дифференциальную форму решений задач 8.1–8.2.

Построение канонической системы. Задачи 8.1–8.2 сводятся к задаче на условный экстремум (см. п. 7.4) со свободным или закрепленным правым концом траектории. Действительно, воспользовавшись свойством (8.8), запишем

$$\int_0^{t_f} \dot{x}^T P_f x dt = \frac{1}{2} x^T P_f x \Big|_{x_0}^{x(t_f)} = \frac{1}{2} x^T(t_f) P_f x(t_f) - \frac{1}{2} x_0^T P_f x_0 \quad (8.28)$$

и преобразуем функционал (8.26) к виду

$$J(x, u) = \frac{1}{2} x_0^T P_f x_0 + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^T Q x + u^T R u + \dot{x}^T P_f x) dt. \quad (8.29)$$

Так как компонента $x_0^T P_f x_0$ не зависит от функций $x(t)$ и $u(t)$, то задача оптимизации системы с функционалом (8.29) может быть решена по схеме решения задач вариационного исчисления, приведенной в 7.4.2. В рассматриваемом случае лагранжиан принимает вид

$$\widehat{f}^0 = \frac{1}{2} (x^T Q x + u^T R u + 2\dot{x}^T P_f x) + \lambda^T (\dot{x} - A x - B u), \quad (8.30)$$

где $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор-функция множителей Лагранжа (вектор состояния сопряженной системы). Решая простейшую задачу вариационного исчисления для расширенного функционала, найдем систему уравнений Эйлера–Лагранжа

$$x^T Q - \lambda^T A - \dot{\lambda}^T = 0, \quad (8.31)$$

$$u^T R - \lambda^T B = 0, \quad (8.32)$$

$$\dot{x} - A x - B u = 0 \quad (8.33)$$

и далее — каноническую систему, т. е. $2n$ -мерную динамическую модель

$$\dot{\lambda} = -A^T \lambda + Q x, \quad (8.34)$$

$$u = R^{-1} B^T \lambda, \quad (8.35)$$

$$\dot{x} = A x + B u = A x + B R^{-1} B^T \lambda, \quad (8.36)$$

представленную основным объектом управления (8.36), алгоритмом управления (8.35) и сопряженной системой (8.34).

Для терминальной задачи 8.1 $2n$ краевых условий записываются в виде $x(0) = x_0$ и $x(t_f) = x_f$. Для задачи 8.2, в которой терминальное состояние $x(t_f)$ не задано, значения переменных на правом конце подчиняются n условиям *трансверсальности* (см. 7.3.4):

$$\lambda(t_f) = -P_f x(t_f). \quad (8.37)$$

Решениями системы (8.34)–(8.36) являются функция $\lambda = \lambda(t)$, а также функции $x = x^*(t)$ и $u = u^*(t)$, доставляющие минимальное значение функционалам (8.22) или (8.26) соответственно и являющиеся искомыми решениями задач 8.1 и 8.2.

Синтез оптимального регулятора. Для получения решения оптимальной задачи в замкнутой форме (задача 8.3) будем искать вектор сопряженной системы (8.34) в виде

$$\lambda = -P x, \quad (8.38)$$

где $P(t) = P(t)^T > 0$ — матрица, подлежащая определению. После дифференцирования выражения (8.38) по времени и соответствующих подстановок получаем

$$(\dot{P} + A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P - Q)x = 0. \quad (8.39)$$

Последнее уравнение справедливо при любых $x = x(t)$, если матрица P является решением дифференциального матричного уравнения Риккати

$$\dot{P} + A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P = -Q. \quad (8.40)$$

Подставляя (8.38) в (8.35), находим пропорциональный алгоритм управления

$$u = Kx, \quad (8.41)$$

где $K = K(t)$ — матрица коэффициентов обратной связи, рассчитываемая по формуле

$$K = -R^{-1}B^T P. \quad (8.42)$$

Уравнение оптимальной системы получается подстановкой (8.41) в (8.1) и принимает вид (рис. 8.2)

$$\dot{x} = A_c x, \quad (8.43)$$

где

$$A_c = A - BR^{-1}B^T P$$

— матрица замкнутой системы.

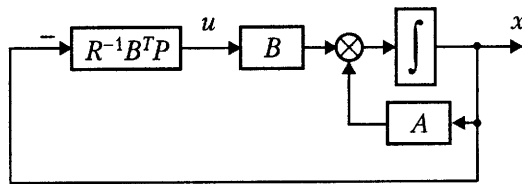


Рис. 8.2. Оптимальная система в задаче ЛКР

Теперь определим значение функционала $J(x, u)$ на найденных оптимальных решениях. После соответствующих подстановок нетрудно получить

$$J^* = J(x^*, u^*) = \frac{1}{2}x^T(t_f)P_f x(t_f) - \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^T \dot{P}x + \dot{x}^T Px + x^T P\dot{x})dt. \quad (8.44)$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{d}{dt}(x^T Px) = x^T \dot{P}x + \dot{x}^T Px + x^T P\dot{x}, \quad (8.45)$$

находим

$$J^* = \frac{1}{2} \left(x^T(t_f) P_f x(t_f) - x^T P x \Big|_{x_0}^{x(t_f)} \right) = \frac{1}{2} x_0^T P(0) x_0.$$

Таким образом, решение задачи 8.3 базируется на следующем утверждении.

Теорема 8.1. Алгоритм управления, обеспечивающий для любых начальных состояний $x_0 \in \mathbb{R}^n$ получение оптимальных решений $x^*(t)$, $u^*(t)$ задач 8.1–8.2, описывается выражениями (8.41)–(8.42), где матрица $P(t)$ является решением уравнения Риккати (8.40). При этом наименьшее значение функционала $J(u, x)$ рассчитывается по формуле

$$J^* = J(x^*, u^*) = \frac{1}{2} x_0^T P(0) x_0. \quad (8.46)$$

Замечание 8.2. Для получения решения $P(t)$ дифференциального уравнения Риккати (8.40) необходимо определить краевые условия. Из выражения (8.38) найдем

$$\lambda(t_f) = -P(t_f)x(t_f). \quad (8.47)$$

В задаче 8.2 воспользуемся условием трансверсальности (8.37), сопоставляя которое с (8.47), получаем

$$P(t_f) = P_f. \quad (8.48)$$

Последнее условие определяет значение матрицы $P(t)$ в конце переходного процесса, что при решении уравнения (8.40) вызывает необходимость применения метода интегрирования в обратном масштабе времени: $\tau = t_f - t$ (см. пример 8.3).

Проблема нахождения матрицы $P(t)$ в терминальной задаче 8.1 в общем случае носит несколько более сложный характер (см. [1, 15]). \square

Пример 8.2. Рассмотрим задачу синтеза оптимального управления объектом

$$\dot{x} = u, \quad (8.49)$$

где x и u — скалярные переменные состояния и управления, полагая, что заданы граничные значения t_f , $x(0) = x_0$, $x(t_f) = 0$ и квадратичный функционал качества

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (qx^2 + \rho u^2) dt, \quad (8.50)$$

где $q \geq 0$, $\rho > 0$.

Каноническая модель принимает вид (см. также пример 7.7)

$$\dot{\lambda} = qx, \quad (8.51)$$

$$u = \frac{1}{\rho} \lambda, \quad (8.52)$$

$$\dot{x} = u = \frac{1}{\rho} \lambda. \quad (8.53)$$

Для получения решений используются условие $x(0) = x_0$ на левом конце траектории и условие $x(t_f) = 0$ на ее правом конце. Нетрудно показать, что задача сводится к задаче Коши, для чего необходимо рассчитать значение $\lambda_0 = \lambda(0)$ такое, чтобы для заданного значения x_0 выполнялось $x(t_f) = 0$.

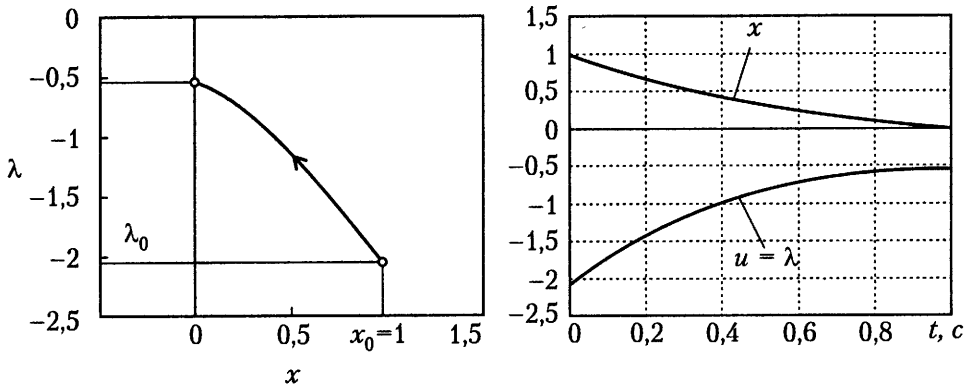


Рис. 8.3. Переходные процессы канонической системы в терминальной задаче (пример 8.2)

На рис. 8.3 представлены интегральная кривая и переходные процессы для задачи оптимального управления при $q = 4, \rho = 1, t_f = 1$ с и $x(0) = 1$. Здесь $\lambda_0 = -2.075$.

Для получение решения в замкнутом виде запишем

$$\lambda = -P(t)x, \tag{8.54}$$

где $P > 0$ — решение дифференциального уравнения Риккати:

$$\dot{P} - \frac{1}{\rho}P^2 = -q. \tag{8.55}$$

Из условия $\lambda_0 = -P(0)x_0$ находим начальное значение

$$P(0) = -\frac{\lambda_0}{x_0}, \tag{8.56}$$

необходимое для интегрирования уравнения (8.55)

Подставляя (8.54) в (8.52), получаем пропорциональный алгоритм управления

$$u = K(t)x = -\frac{1}{\rho}P(t)x. \tag{8.57}$$

Решение уравнения (8.55) и графики переходных процессов для указанного выше частного случая приведены на рис. 8.4. Здесь $P(0) = 2.075$ и $K(t) = -P(t)$. Нетрудно получить также минимальное значение $J^* = (x_0^2/2)P(0) = 1.0375$. Найденные оптимальные решения $x(t)$ и $u(t)$ совпадают с представленными на рис. 8.3.

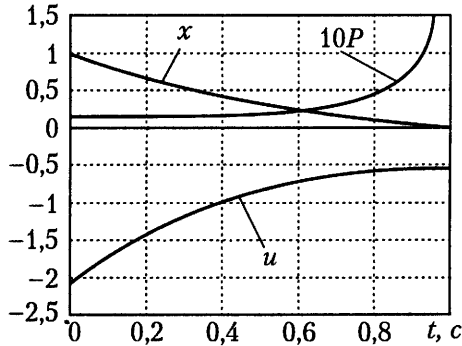


Рис. 8.4. Переходные процессы оптимальной системы (пример 8.2)

Следует обратить внимание на то, что при $t \rightarrow t_f$ решение уравнения (8.40) устремляется в бесконечность: $P \rightarrow \infty$. Это обусловлено нулевым краевым условием: $x_f = 0$. Отметим также, что при $t_f \rightarrow \infty$ получаем задачу 8.1, а оптимизации на бесконечном интервале, где $\lambda(0) = -2$ и $P \equiv 2$ (см. пример 7.7). \square

Пример 8.3. Рассмотрим задачу синтеза оптимального управления объектом (8.49), полагая, что заданы только значения t_f и $x(0) = x_0$, а функционал качества содержит штраф за конечное состояние $x_f = x(t_f)$, т. е.

$$J(x, u) = \frac{P_f}{2} x_f^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (qx^2 + \rho u^2) dt, \quad (8.58)$$

где $q \geq 0$, $\rho > 0$, $P_f > 0$. В этом случае имеет место задача со свободным правым концом. Каноническая модель сохраняет вид (8.51), и вводится условие трансверсальности, связывающее значения $\lambda_f = \lambda(t_f)$ и $x_f = -x(t_f)$:

$$\lambda_f = -P_f x_f. \quad (8.59)$$

Условие определяет в пространстве состояний канонической модели прямую конечных значений S_f (см. рис. 8.5). Нетрудно показать, что задача сводится к задаче Коши, для чего необходимо рассчитать значение $\lambda_0 = \lambda(0)$ такое, чтобы для заданного значения x_0 выполнялось условие (8.59).

На рис. 8.5 представлена интегральная кривая и переходные процессы для задачи оптимального управления при $q = 4$, $\rho = 1$, $P_f = 1$, $t_f = 1$ с, $x(0) = 1$. Здесь $\lambda_0 = -1.975$.

Для получения решения в замкнутом виде используется уравнение Риккати (8.55), в котором задано краевое условие $P(t_f) = P_f$. Решение уравнения Риккати может быть получено при интегрировании в обратном масштабе времени: $\tau = t_f - t$ (рис. 8.6, а). Пропорциональный алгоритм управления принимает вид (8.57).

Кривая изменения коэффициента обратной связи $K(t)$, а также графики переходных процессов $x(t)$ и $u(t)$ для указанного выше частного случая приведены на

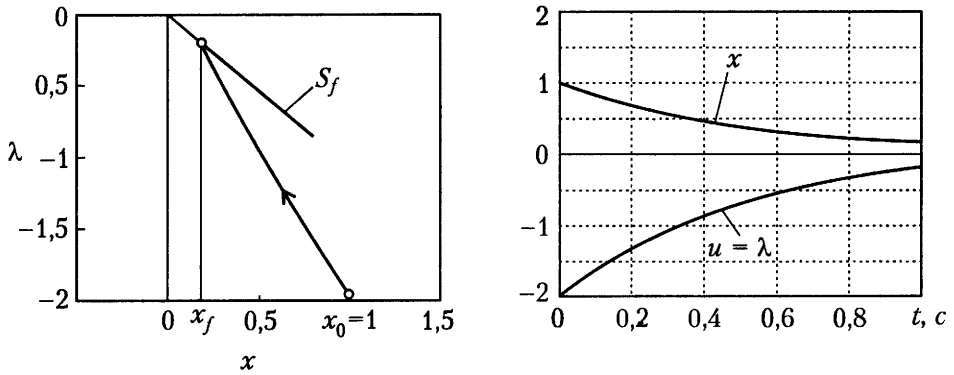


Рис. 8.5. Переходные процессы канонической системы в задаче со свободным правым концом (пример 8.3)

рис. 8.6, б и показывают, что оптимальные решения для замкнутой системы совпадают с приведенными на рис. 8.5, б. Так как $P(0) = 1.975$, то по формуле (8.46) находим $J^* = (x_0^2/2)P(0) = 0.99$. □

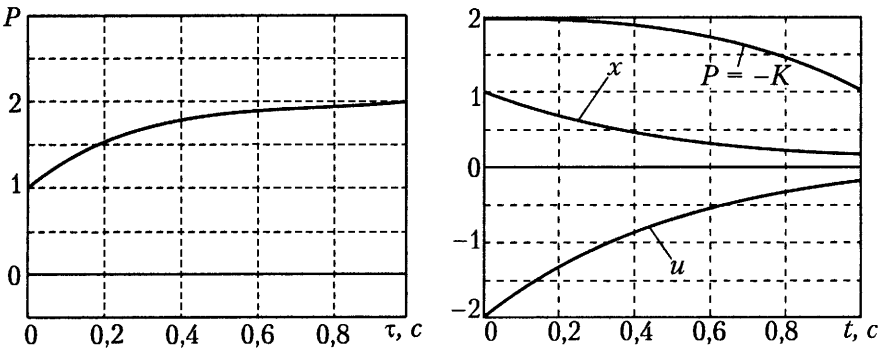


Рис. 8.6. Решение уравнения Риккати и переходные процессы оптимальной системы (пример 8.3)

Избыточность задач ЛКР. Одно и то же решение оптимальной задачи может соответствовать различным квадратичным критериям (8.26), т. е. такие функционалы, как правило, содержат несущественную часть. Действительно, с использованием свойства 8.1 (выражение (8.9)) функционал (8.26) можно переписать в виде

$$J(x, u) = \frac{1}{2}x_0^T P_0 x_0 + \bar{J}(x, u), \tag{8.60}$$

где

$$\bar{J}(x, u) = \frac{1}{2}x^T(t_f)\bar{P}x(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (y^T(t)y(t) + u^T(t)Ru(t))dt. \tag{8.61}$$

Здесь $y \in \mathbb{R}^m$ является виртуальным вектором выхода:

$$y = Cx, \quad (8.62)$$

матрицы $P_0 = P_0 \geq 0$ и C ($m \times n$) находятся как решения системы алгебраических уравнений (8.5)–(8.6), и

$$\bar{P}_f = P_f - P_0. \quad (8.63)$$

Решение оптимальной задачи сводится к минимизации функционала \bar{J} и не зависит от первого слагаемого выражения (8.60). Поэтому для различных весовых матриц Q , доставляющих одинаковое решение C системе уравнений (8.5)–(8.6), можно получить (при соответствующем выборе матрицы P_f) идентичные решения $x^*(t)$ и $u^*(t)$, а также идентичные матрицы обратной связи $K(t)$. Последние определяются по формуле

$$K = -R^{-1}B^T\bar{P}, \quad (8.64)$$

где матрица \bar{P} является решением дифференциального уравнения Риккати вида

$$\dot{\bar{P}} + A^T\bar{P} + \bar{P}A - \bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P} = -C^TC \quad (8.65)$$

с краевым значением (см. замечание 8.2)

$$\bar{P}(t_f) = \bar{P}_f. \quad (8.66)$$

Минимальное значение функционала \bar{J} находится по формуле, аналогичной (8.46): $\bar{J}^* = x_0^T \bar{P}(0)x_0/2$, и следовательно, минимальным значением исходного функционала (8.26) будет

$$J^* = J(x^*, u^*) = \frac{1}{2}x_0^T(P_0 + \bar{P}(0))x_0. \quad (8.67)$$

Пример 8.4. Рассмотрим объект управления 2-го порядка:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u \quad (8.68)$$

и функционал

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x_1^2 + q_2 x_2^2 + \rho u^2) dt. \quad (8.69)$$

Здесь $Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{vmatrix}$, и система уравнений (8.5)–(8.6) имеет решения (см. пример 8.1)

$$P_0 = \begin{vmatrix} \sqrt{q_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad C = [1 \quad \sqrt{q_2}].$$

Следовательно, можно записать

$$J = \frac{\sqrt{q_2}}{2} x_{10}^2 + \bar{J}, \quad (8.70)$$

где

$$\bar{J} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (y^2 + \rho u^2) dt, \quad (8.71)$$

$$y = x_1 + \sqrt{q_2} x_2. \quad (8.72)$$

Таким образом, исходная задача эквивалентна минимизации функционала \bar{J} , в котором весовая матрица при переменных состояния имеет вид $C^T C$. Откуда следует, что для обеих задач оптимальными будут идентичные решения $x^*(t)$ и $u^*(t)$, а также идентичные матрицы обратной связи K (см. пример 8.6). Более того, нетрудно показать, что для функционалов

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x_1^2 + 2q_{12}x_1x_2 + q_2x_2^2 + \rho u^2) dt, \quad (8.73)$$

где $Q = \begin{vmatrix} 1 & q_{12} \\ q_{12} & q_2 \end{vmatrix}$, $q_{12} \in [0, \sqrt{q_2}]$, система (8.5)–(8.6) имеет то же решение $C = [1 \ \sqrt{q_2}]$, и следовательно, функционал \bar{J} остается без изменений. Естественно, что решение оптимальной задачи приводит к тем же переходным процессам $x^*(t)$ и $u^*(t)$. \square

Отмеченная избыточность рассматриваемого класса оптимальных задач как правило устраняется при выборе весовой матрицы

$$Q = C^T C. \quad (8.74)$$

В этом случае задача оптимального управления формулируется как задача минимизации функционала (8.61) и решается по приведенной выше схеме. Таким образом, имеет место следующее положение.

Теорема 8.2. Алгоритм управления, обеспечивающий для любых начальных состояний $x_0 \in \mathbb{R}^n$ получение оптимальных решений $x^*(t)$ и управления $u^*(t)$ системы (8.1), (8.62) в задаче минимизации функционала (8.61) описывается выражениями (8.41), (8.64), где матрица $\bar{P}(t) > 0$ является решением уравнения Риккати (8.65) с краевым значением (8.66). При этом функционал $\bar{J}(x, u)$ принимает наименьшее значение

$$\bar{J}^* = \bar{J}(x^*, u^*) = \frac{1}{2} x_0^T \bar{P}(0) x_0.$$

8.1.3. Задача оптимизации на бесконечном интервале

Задачи 8.1, а оптимизации на бесконечном интервале времени и соответствующая задача 8.3 синтеза оптимального регулятора, для которых функционал качества принимает вид

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)) dt, \quad (8.75)$$

обычно рассматриваются как предельный случай терминальной задачи 8.1 при $t_f \rightarrow \infty$ [15]. Использование уравнений Эйлера–Лагранжа приводит к канонической системе (8.34)–(8.36), решения которой ищутся для заданных начального значения $x(0) = x_0$ и конечного значения $x(\infty) = 0$, а оптимальный регулятор синтезируется по схеме, рассмотренной в 7.4.2 и 8.1.2.

Синтез оптимального регулятора. Для получения решения оптимальной задачи в замкнутой форме (задача 8.3) вектор сопряженной системы ищется в виде (8.38), где в рассматриваемом случае $P = P^T > 0$ — стационарная матрица, являющаяся решением алгебраического матричного уравнения Лурье (или уравнения типа Риккати, см. 7.4.2)

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P = -Q. \quad (8.76)$$

Подставляя (8.38) в (8.35), находим пропорциональный алгоритм управления

$$u = Kx, \quad (8.77)$$

где K — матрица постоянных коэффициентов обратной связи, рассчитываемая по формуле

$$K = -R^{-1}B^T P. \quad (8.78)$$

Уравнение оптимальной системы получается подстановкой (8.77) в (8.1) и принимает вид

$$\dot{x} = A_c x, \quad (8.79)$$

где

$$A_c = A - BR^{-1}B^T P$$

— стационарная матрица замкнутой системы.

Отметим, что алгебраическое уравнение (8.76) имеет несколько решений. Существование положительно определенного решения P , а также асимптотическая устойчивость системы, или $\operatorname{Re} \lambda_i \{A_c\} < 0$, обеспечивается при некоторых дополнительных условиях. Пусть весовая матрица Q имеет ранг $\nu \leq n$ и, следовательно, может быть представлена в виде

$$Q = Q_1^T Q_1,$$

где Q_1 — матрица размера $\nu \times n$ и ранга ν . Имеет место следующее положение.

Теорема 8.3. Пусть пара A, B полностью управляема, а пара A, Q_1 полностью наблюдаема. Тогда:

1) существует решение $P > 0$ уравнения Риккати (8.76);

2) оптимальные решения $x^*(t)$ и $u^*(t)$ задачи минимизации функционала (8.75) для любых начальных состояний $x_0 \in \mathbb{R}^n$ обеспечиваются пропорциональным алгоритмом управления (8.77)–(8.78), где матрица $P > 0$ является решением уравнения Риккати (8.76);

3) замкнутая система (8.79) с матрицей обратной связи (8.78) асимптотически устойчива, т. е. выполняется условие (8.23), и

$$\operatorname{Re} \lambda_i \{A_c\} < 0, \quad i = \overline{1, n}; \quad (8.80)$$

4) наименьшее значение функционала (8.75) —

$$J^* = J(x^*, u^*) = \frac{1}{2} x_0^T P x_0. \quad (8.81)$$

Пример 8.5. Рассмотрим объект управления (8.68) и функционал (8.69) (см. пример 8.4). Здесь

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{vmatrix}$$

и $R = \rho$. Решением уравнения Риккати (8.76) является положительно определенная матрица

$$P = \begin{vmatrix} \sqrt{2\sqrt{\rho} + q_2} & \sqrt{\rho} \\ \sqrt{\rho} & \sqrt{\rho(2\sqrt{\rho} + q_2)} \end{vmatrix}.$$

По формуле (8.78) находим матрицу обратной связи

$$K = - \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{\rho}} & \frac{\sqrt{2\sqrt{\rho} + q_2}}{\sqrt{\rho}} \end{vmatrix}. \quad (8.82)$$

Следовательно, можно записать

$$u = -\frac{1}{\sqrt{\rho}} x_1 - \frac{\sqrt{2\sqrt{\rho} + q_2}}{\sqrt{\rho}} x_2. \quad (8.83)$$

Уравнение оптимальной системы приобретает вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{1}{\sqrt{\rho}} x_1 - \frac{\sqrt{2\sqrt{\rho} + q_2}}{\sqrt{\rho}} x_2. \quad (8.84)$$

Полюсы системы —

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2\sqrt{\rho}} \left(\sqrt{2\sqrt{\rho} + q_2} \mp \sqrt{-2\sqrt{\rho} + q_2} \right). \quad (8.85)$$

Для случая $q_2 = 0.16$, $\rho = 0.25$ получим:

$$P = \begin{vmatrix} 1.08 & 0.5 \\ 0.5 & 0.54 \end{vmatrix}, \quad K = - \begin{vmatrix} 2 & 2.15 \end{vmatrix},$$

алгоритм управления —

$$u = -2x_1 - 2.15x_2 \quad (8.86)$$

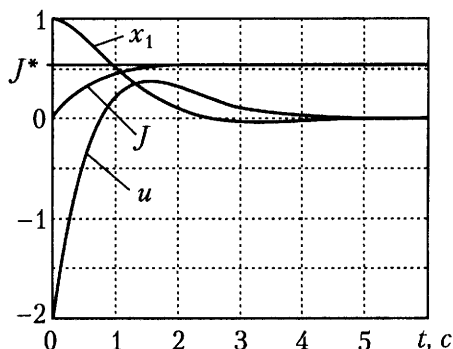


Рис. 8.7. Процессы оптимальной системы (пример 8.5, $\rho=0.25$)

и уравнение замкнутой системы —

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -2x_1 - 2.15x_2, \quad (8.87)$$

т. е. $A_c = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2.15 \end{vmatrix}$. Полюсы системы — $p_{1,2} = -1.08 \mp j0.92$. При $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$ по формуле (8.81) найдем $J^* = 0.54$. *

Графики оптимальных процессов для рассматриваемого случая приведены на рис. 8.7. □

Избыточность задачи и минимизация выходной переменной. Как и в общем случае (см. 8.1.2), одно и то же решение рассматриваемой задачи обычно соответствует различным функционалам качества. Действительно, критерий (8.75) можно переписать в виде

$$J(x, u) = \frac{1}{2} x_0^T P_0 x_0 + \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(x(t)^T C^T C x(t) + u^T(t) R u(t) \right) dt, \quad (8.88)$$

где матрицы $P_0 = P_0 \geq 0$ и C ($m \times n$) находятся как решения системы алгебраических уравнений типа (8.5)–(8.6). Так как решение оптимальной задачи сводится к минимизации второго слагаемого выражения (8.88), то для различных весовых матриц Q , доставляющих одинаковое решение C системе уравнений (8.5)–(8.6), получаются идентичные выражения (8.78) для матрицы обратной связи K , где матрица P является решением уравнения типа Риккати

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P = -C^T C. \quad (8.89)$$

Выберем весовую матрицу

$$Q = C^T C \quad (8.90)$$

и поставим задачу оптимального управления как задачу минимизации функционала

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (y^T(t)y(t) + u^T(t)Ru(t)) dt, \quad (8.91)$$

где $y \in \mathbb{R}^m$ — виртуальный выход системы:

$$y = Cx. \quad (8.92)$$

Задача минимизации функционала (8.91) эквивалентна задаче оптимального управления системой (8.1), (8.92) (рис. 8.8) с учетом динамической ошибки по выходной переменной $y(t)$. Как следствие теоремы 8.3 сформулируем следующее положение.

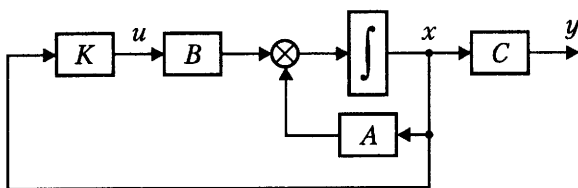


Рис. 8.8. Оптимальная система с выходом y .

Теорема 8.4. Пусть система (8.1), (8.92) не вырождена, т. е. тройка матриц (A, B, C) полностью управляема и полностью наблюдаема. Тогда:

- 1) существует решение $P(t) > 0$ уравнения Риккати (8.89);
- 2) оптимальные решения $x^*(t)$ и $u^*(t)$ задачи минимизации функционала (8.91) для любых начальных состояний $x_0 \in \mathbb{R}^n$ обеспечиваются пропорциональным алгоритмом управления (8.77)–(8.78), где матрица $P(t) > 0$ является решением уравнения Риккати (8.89);
- 3) замкнутая система (8.79) с матрицей обратной связи (8.78) асимптотически устойчива, т. е. выполняются условия (8.23) и (8.80);
- 4) наименьшее значение функционала (8.91) определяется выражением (8.81).

Пример 8.6. Рассмотрим объект управления (8.68) и функционал

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (y^2 + \rho u^2) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} ((x_1 + C_2 x_2)^2 + \rho u^2) dt. \quad (8.93)$$

Здесь

$$y = x_1 + C_2 x_2, \quad (8.94)$$

и $Q = \begin{vmatrix} 1 & C_2 \\ C_2 & C_2^2 \end{vmatrix} \geq 0$. Нетрудно показать, что при $C_2 = \sqrt{q_2}$ (см. пример 8.4) задача эквивалентна рассмотренной в примере 8.5 и имеет те же решения. \square

8.1.4. Асимптотические свойства задачи ЛКР

Решение общей задачи линейного квадратичного регулирования зависит от выбора матриц Q , R , P_f (см. также 8.1.1). Нетрудно показать, что увеличение нормы матрицы Q и, следовательно, штрафа за мгновенные квадратичные отклонения системы от точки $x = 0$ приводит к более быстрым и менее колебательным процессам, увеличение нормы матрицы R и штрафа за большие управления влечет за собой уменьшение управляющих воздействий и замедление переходных процессов, а увеличение нормы матрицы P_f и штрафа за терминальные отклонения системы — уменьшение нормы конечного состояния $x(t_f)$. Более конкретные заключения могут быть сделаны после рассмотрения асимптотических свойств решений задачи оптимального управления, т. е. свойств оптимальных систем при неограниченном увеличении (или уменьшении) соответствующих весовых матриц [15].

Далее ограничимся рассмотрением частного случая задачи оптимизации на бесконечном интервале времени (задача 8.1, а) для одноканального объекта управления (см. рис. 8.8)

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (8.95)$$

с виртуальным выходом

$$y = Cx \quad (8.96)$$

и функционалом

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (y^2(t) + \rho u^2(t)) dt, \quad (8.97)$$

где B и C матрицы $n \times 1$ и $1 \times n$ соответственно и $\rho > 0$. Полагаем, что тройка (A, B, C) удовлетворяет условиям теоремы 8.4, и следовательно, существует решение задачи ЛКР в замкнутой форме:

$$u = Kx, \quad (8.98)$$

где K — матрица-строка постоянных коэффициентов обратной связи, рассчитываемая по формуле

$$K = -\rho^{-1} B^T P, \quad (8.99)$$

$P = P^T > 0$ — решение алгебраического уравнения типа Риккати

$$A^T P + PA - \rho^{-1} P B B^T P = -C^T C. \quad (8.100)$$

Будем исследовать свойства оптимальной системы

$$\dot{x} = A_c x, \quad (8.101)$$

где $A_c = A - \rho^{-1} B B^T P$ — стационарная матрица замкнутой системы, при изменении весового коэффициента ρ . Отметим, что аналогичные свойства могут быть

получены для функционалов более общего вида (8.75), что предполагает приведение задачи к рассматриваемой (см. 8.1.2) и нахождение матрицы C в результате решения системы уравнений вида (8.5)–(8.6).

Запишем уравнения объекта управления (8.95)–(8.96) в операторной форме

$$y(t) = W(p)u(t), \quad (8.102)$$

где $W(p)$ — передаточная функция разомкнутой системы. Пусть объект управления имеет относительную степень $n - \nu$, нули p_i^0 ($i = \overline{1, \nu}$) и полюсы $p_i = \lambda_i\{A\}$ ($i = \overline{1, n}$). Тогда

$$W(p) = C(pI - A)^{-1}B = \frac{b(p)}{a(p)} = \frac{\beta_0(p - p_1^0) \dots (p - p_\nu^0)}{(p - p_1) \dots (p - p_n)}, \quad (8.103)$$

где $\beta_0 \neq 0$.

Определим также полюсы $p_{ic} = \lambda_i\{A_c\}$ ($i = \overline{1, n}$) и передаточную функцию замкнутой системы (8.101), (8.96):

$$W_c(p) = C(pI - A_c)^{-1}B = \frac{b_c(p)}{a_c(p)}, \quad (8.104)$$

а также комплексные числа p_i^- ($i = \overline{1, n - \nu}$), равные $n - \nu$ вещественно-отрицательным корням нормированного полинома Баттерворта порядка $n - \nu$ (см. [24]), т. е.

$$\operatorname{Re} p_i^- < 0, \quad |p_i^-| = 1.$$

Имеет место следующее положение.

Теорема 8.5. Пусть система (8.95)–(8.96) не вырождена, т. е. тройка матриц (A, B, C) полностью управляема и полностью наблюдаема. Тогда:

1)

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} p_{ic} = \begin{cases} p_i^0, & \text{если } \operatorname{Re} p_i^0 \leq 0, \\ -p_i^0, & \text{если } \operatorname{Re} p_i^0 > 0, \end{cases} \quad i = \overline{1, \nu}; \quad (8.105)$$

2)

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{p_{ic}}{\omega} = p_i^-, \quad i = \overline{\nu + 1, n}, \quad (8.106)$$

где

$$\omega = \left(\frac{\beta_0^2}{\rho} \right)^{1/(2(n-\nu))}; \quad (8.107)$$

3)

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} p_{ic} = \begin{cases} p_i, & \text{если } \operatorname{Re} p_i \leq 0, \\ -p_i, & \text{если } \operatorname{Re} p_i > 0, \end{cases} \quad i = \overline{1, n}. \quad (8.108)$$

Теорема показывает, что *при уменьшении штрафа за управление* (а точнее за энергетические потери) $n - \nu$ полюсов замкнутой системы асимптотически стремятся к вещественно-неположительным числам, равным нулям разомкнутой системы (при $\operatorname{Re} p_i^0 \leq 0$), либо числам, им противоположным (при $\operatorname{Re} p_i^0 > 0$). Остальные ν полюсов устремляются в бесконечность, приближаясь к корням полинома Баттерворта с радиусом распределения (8.107). При этом, как правило, процессы в системе значительно ускоряются благодаря достаточно большим управляющим сигналам.

При увеличении штрафа за управление все корни системы асимптотически стремятся к вещественно-неположительным числам, равным полюсам разомкнутой системы (при $\operatorname{Re} p_i \leq 0$), либо числам противоположным по знаку (при $\operatorname{Re} p_i > 0$). В тех случаях, когда все полюсы разомкнутой системы вещественно-неположительны, достаточно большие штрафы на управление приводят к нулевым управляющим воздействиям, т. е. размыканию системы (8.101): $A_c \rightarrow A$. Для неустойчивых разомкнутых систем с вещественно положительными полюсами, даже большие штрафы на управление обеспечивают отображение корней в левую полуплоскость:

$$\operatorname{Re} \lambda_i \{A_c\} \rightarrow -\operatorname{Re} \lambda_i \{A\} < 0,$$

и получение устойчивых переходных процессов.

Пример 8.7. Рассмотрим объект управления (8.68) и функционал (8.69). Как показано в примере 8.6, задача оптимизации по функционалу (8.69) эквивалентна оптимизации системы по функционалу (8.93), где виртуальный выход определяется выражением (8.94), т. е.

$$C = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{q_2} \end{vmatrix}. \quad (8.109)$$

Матрица обратной связи определяется выражением (8.82). Нетрудно видеть, что при $\rho \rightarrow \infty$ имеет место $K \rightarrow 0$ и, следовательно, система становится разомкнутой. При $\rho \rightarrow 0$ коэффициенты обратной связи неограниченно возрастают, и при достаточно большом значении ρ можно записать

$$K \simeq -\frac{1}{\sqrt{\rho}} \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{q_2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{\rho}} C. \quad (8.110)$$

Передаточная функция разомкнутой системы с выходом y имеет вид

$$W(p) = \frac{\sqrt{q_2} p + 1}{p^2}. \quad (8.111)$$

Система имеет 2 нулевых полюса и один нуль $p^0 = -1/\sqrt{q_2}$.

По теореме 8.5 получим свойства полюсов $p_{c1,2}$ замкнутой системы:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} p_{c1} = -\frac{1}{\sqrt{q_2}}, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{p_{c2}}{\omega} = -1, \quad (8.112)$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{q_2}{\rho}}, \tag{8.113}$$

и

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} p_{c,1,2} = p_{1,2} = 0. \tag{8.114}$$

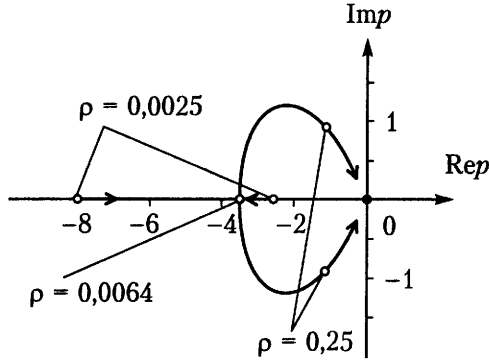


Рис. 8.9. Корневой годограф оптимальной системы (пример 8.5)

Корневой годограф системы для случая $q_2 = 0.16$ ($C = |1 \ 0.4|$) представлен на рис. 8.9. На рис. 8.10, а приведены оптимальные переходные процессы при $\rho = 0.0025$, а на рис. 8.10, б — при $\rho = 0.0064$. Процессы оптимальной системы при $\rho = 0.25$ были представлены в примере 8.5 (см. рис. 8.7). Сравнение графиков показывает, что при малых ρ переходные процессы $x_1(t)$ имеют лучшие качественные показатели, что достигается за счет достаточно больших управлений $u(t)$ (см. также пример 8.1, в котором рассматривается случай $\rho = 0$). При увеличении ρ и, следовательно, штрафов за энергетические потери управляющие воздействия уменьшаются. □

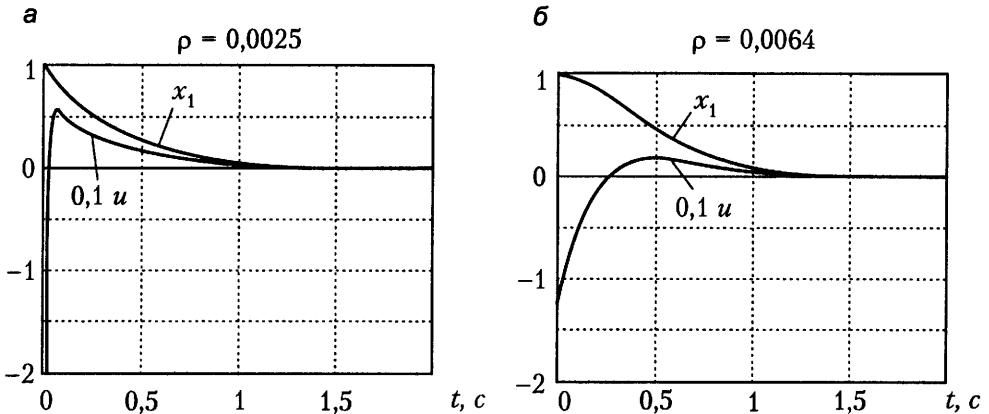


Рис. 8.10. Процессы оптимальной системы (пример 8.7)

8.2. Принцип максимума

Основным недостатком классической теории вариационного исчисления и соответствующих ей методов оптимального управления является отсутствие ограничений типа неравенств и предположение о гладкости оптимальных решений. В связи с этим попытки их использования для целого ряда оптимальных задач приводят к вырожденным решениям (например, к бесконечно большим управлениям или разрывным траекториям). В реальных системах всегда присутствуют ограничения на управляющие воздействия и переменные состояния, что, как правило, связано с использованием негладких и разрывных управляющих воздействий. Указанные ограничения и расширение класса рассматриваемых решений являются важной отличительной особенностью принципа максимума, основные положения которого выдвинуты Л. С. Понтрягиным и развиты В. Г. Болтянским, Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко [33].

8.2.1. Функция Гамильтона и основная теорема

Принцип максимума является обобщением теории Гамильтона для задач управления с ограниченными и негладкими функциями.

Рассмотрим нелинейную систему

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (8.115)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u = \{u_j\}$ — m -мерный вектор управления, $t \in [0, t_f]$, f — вектор-функция, непрерывная по x и u и непрерывно-дифференцируемая по x , а также функционал

$$J(x, u) = \int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t)) dt, \quad (8.116)$$

где f^0 — функция, непрерывная по x и u и непрерывно-дифференцируемая по x , $t_f > 0$ — время окончания процесса, величина которого в общем случае может быть неизвестна (не задана). Будем полагать, что для объекта управления (8.115) заданы граничные условия $x(0) = x_0$, $x(t_f) = x_f$ и ограничения на управление

$$u \in \mathcal{U}, \quad (8.117)$$

где \mathcal{U} — односвязная область m -мерного пространства. Отметим, что указанные ограничения часто задаются в виде неравенств $|u_j| \leq U_j$, где $U_j > 0$, $j = \overline{1, m}$, и после некоторого преобразования уравнения объекта (8.115) могут быть представлены как

$$|u_j| \leq 1, \quad (8.118)$$

что соответствует гиперкубу в пространстве \mathbb{R}^m . Кусочно-непрерывные управления $u_j(t)$, удовлетворяющие условию (8.117) (или (8.118)), называются *допустимыми*.

Задача оптимального управления формулируется следующим образом.

Задача 8.4. Найти оптимальный переходный процесс $x = x^*(t)$ и оптимальное допустимое управление $u = u^*(t)$, обеспечивающее перевод объекта управления (8.115) из точки $x(0) = x_0$ в точку $x(t_f) = x_f$ и доставляющее минимум функционалу (8.116), т. е.

$$\{x^*(t), u^*(t)\} = \arg \min_{u \in \mathcal{U}} J(x, u).$$

По схеме, рассмотренной в 7.5.2, сформируем гамильтониан

$$H(x, u, \lambda) = -f^0(x, u) + \lambda^T f(x, u), \quad (8.119)$$

где $\lambda = \lambda(t)$ — вектор-функция множителей Лагранжа, являющаяся решением сопряженной системы

$$\dot{\lambda} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T. \quad (8.120)$$

Напомним (см. 7.5.2), что для функции H справедливо также следующее выражение:

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^T, \quad (8.121)$$

идентичное дифференциальному уравнению объекта управления (8.115) и составляющее совместно с уравнением (8.120) каноническую модель оптимальной задачи. Для случая гладких неограниченных управлений решение задачи сводится к нахождению функции $u^*(t)$, удовлетворяющей условию стационарности гамильтониана

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0. \quad (8.122)$$

При этом на оптимальных решениях выполняется $\dot{H} = 0$ и, следовательно,

$$H(x^*, u^*, \lambda) = \text{const}. \quad (8.123)$$

Нетрудно показать, что функция $u^*(t)$, соответствующая стационарному решению, доставляет наибольшее значение функции Гамильтона (8.119), и записать

$$H(x, u, \lambda) = \mu(x^*, \lambda), \quad (8.124)$$

где

$$\mu(x, \lambda) = \max_u H(x, u, \lambda). \quad (8.125)$$

Пример 8.8. Рассмотрим задачу синтеза оптимального управления объектом

$$\dot{x} = u, \quad (8.126)$$

где x и u — скалярные переменные, полагая, что заданы граничные условия $t_f > 0$, $x(0) = x_0$, $x(t_f) = 0$ и функционал качества (затрат энергии)

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^2 dt. \quad (8.127)$$

Здесь функция Гамильтона принимает вид

$$H(u, \lambda) = -\frac{1}{2}u^2 + \lambda u, \quad (8.128)$$

а уравнение сопряженной системы —

$$\dot{\lambda} = 0. \quad (8.129)$$

Оптимальное управляющее воздействие ищется из условия стационарности

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -u + \lambda = 0, \quad (8.130)$$

и определяется как

$$u = \lambda. \quad (8.131)$$

Принимая во внимание, что решением сопряженной системы является $\lambda = \lambda(0)$, найдем: $x = x_0 + \lambda t$, и следовательно,

$$\lambda = \lambda(0) = -\frac{x_0}{t_f}. \quad (8.132)$$

Решения канонической системы, соответствующие $t_f = 1$ и различным начальным значениям $x(0)$, приведены на рис. 8.11, а.

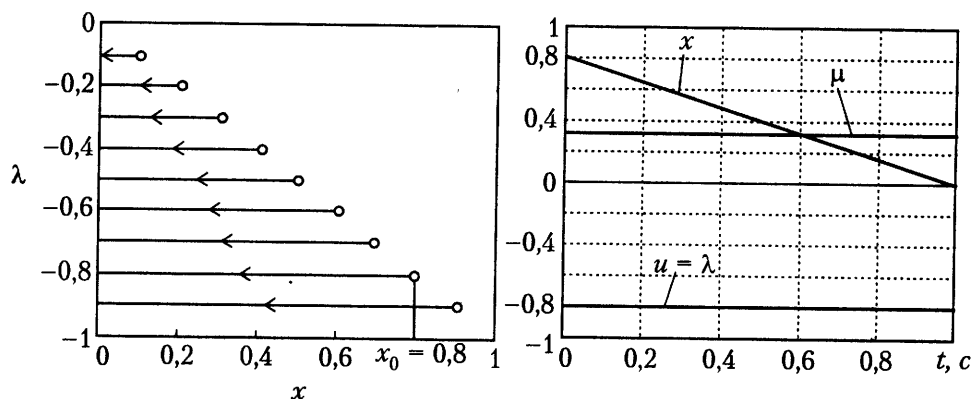


Рис. 8.11. Траектории системы, оптимальной по затратам энергии (пример 8.8)

Подставляя (8.130) и (8.131) в (8.128), получаем наибольшее значение гамильтониана:

$$\mu(\lambda) = \max_u H(u, \lambda) = \frac{1}{2} \lambda^2 = \frac{x_0^2}{2t_f^2}. \quad (8.133)$$

На рис. 8.11, б представлены оптимальные процессы и соответствующая функция Гамильтона $\mu = \max_u H$ при $x(0) = 0.8$. \square

Для задач с ограниченным управлением стационарное решение $u^*(t)$ может оказаться вне области \mathcal{U} , что в первую очередь и определяет ограниченные возможности теории Гамильтона.

Определим наибольшее значение функции Гамильтона для допустимых управлений u :

$$\mu(x, \lambda) = \max_{u \in \mathcal{U}} H(x, u, \lambda), \quad (8.134)$$

запишем уравнение сопряженной системы (8.120) в развернутом виде

$$\dot{\lambda} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \lambda + \left(\frac{\partial f^0}{\partial x}\right)^T \quad (8.135)$$

и представим формулировку *принципа максимума*.

Теорема 8.5. Пусть $x = x^*(t)$ и $u = u^*(t)$ — решения задачи 8.4. Тогда:

1) существует ненулевое решение $\lambda(t)$ уравнения (8.120) такое, что

$$H(x, u, \lambda) = \mu(x, \lambda); \quad (8.136)$$

2) если время процессов t_f не задано, то

$$\mu(x(t_f), \lambda(t_f)) = 0. \quad (8.137)$$

Замечание 8.3. Условие 2) носит характер условий трансверсальности (см. 7.3.4) и может быть использовано, например, для нахождения неизвестного значения t_f . Если конечное время t_f задано, то условие 2), вообще говоря, несправедливо. Тем не менее в любом случае при $t \in [0, t_f]$ имеет место тождество

$$\mu(x(t), \lambda(t)) \equiv \text{const}, \quad (8.138)$$

т. е. на оптимальных решениях функция Гамильтона сохраняет постоянное значение. \square

Замечание 8.4. В случае когда конечное время t_f не задано, и следовательно, выполняется (8.137), выражение (8.138) для любых $t \in [0, t_f]$ имеет вид

$$\mu(x(t), \lambda(t)) \equiv 0 \quad (8.139)$$

и оба условия принципа максимума сводятся к формуле

$$\max_{u \in \mathcal{U}} H(x, u, \lambda) = 0. \quad (8.140)$$

□

Как отмечалось выше, в простейших случаях оптимальные решения получаются из условия стационарности гамильтониана (8.122). Если это условие дает значения u , лежащие за пределами области \mathcal{U} , то резонно предположить, что значения управления, доставляющие максимум гамильтониану, будут лежать на границе указанной области (для случая (8.118) это будут значения $u_j = \pm 1$). Для негладких функций Гамильтона следует также допустить возможность существования решений в сингулярных точках, где функция $\partial H / \partial u$ не определена. Наконец, не исключена возможность неединственности решений $x^*(t)$ и $u^*(t)$, удовлетворяющих формулировке теоремы 8.5. В связи с этим вводятся следующие понятия.

Задача оптимального управления называется *нормальной*, если для нее существуют единственные оптимальные решения $x^*(t)$ и $u^*(t)$, и *вырожденной* в противном случае.

8.2.2. Оптимальные управляющие воздействия (частные случаи) *

Пусть объект управления является аффинным и имеет один вход, т. е.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (8.141)$$

где u — скалярное управляющее воздействие, а ограничение на управление задано в виде неравенства

$$|u| \leq 1. \quad (8.142)$$

В этом случае функция Гамильтона принимает вид

$$H(x, u, \lambda) = -f^0(x, u) + \lambda^T f(x) + \lambda^T g(x) u, \quad (8.143)$$

где вектор-функция $\lambda = \lambda(t)$ является решением сопряженной системы

$$\dot{\lambda} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} u\right)^T \lambda + \left(\frac{\partial f^0}{\partial x}\right)^T. \quad (8.144)$$

Гамильтониан как функция управления u может достигать наибольших значений в стационарных точках, в которых $\partial H / \partial u = 0$, граничных точках $u = \pm 1$, а также в сингулярных точках, в которых производная $\partial H / \partial u$ не определена.

Оптимальные решения на границах множества \mathcal{U} (т. е. $u = \pm 1$) во многих случаях могут быть получены как $u^* = \text{sign}(g^T \lambda)$ (см. ниже). Для анализа решений во внутренности множества запишем

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -F^0(x, u) + \lambda^T g(x), \quad (8.145)$$

где $F^0(x, u) = \partial f^0 / \partial u$. Выражение показывает, что в сингулярных точках претерпевает разрыв функция $F^0(x, u)$, а для нахождения стационарных решений (в предположении существования функции $F^0(x, u)$) необходимо решить относительно u уравнение

$$-F^0(u, x) + \lambda^T g(x) = 0. \quad (8.146)$$

Если указанные решения существуют и на некоторых интервалах времени удовлетворяют ограничению (8.142), то рассматриваемая задача допускает оптимальные решения на внутренних точках интервала $U = [-1, 1]$.

Отметим, что если на некотором конечном интервале времени выполняется $g^T \lambda = 0$, то рассмотренные решения оптимальной задачи не единственны, что делает такую задачу вырожденной.

Далее рассмотрим частные случаи, соответствующие наиболее распространенным функционалам качества, представляющим:

- затраты времени

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} dt = t_f; \quad (8.147)$$

- затраты энергии и времени

$$J = \int_0^{t_f} \left(1 + \frac{\rho}{2} u^2(t)\right) dt = t_f + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \rho u^2(t) dt; \quad (8.148)$$

где $\rho > 0$;

- затраты топлива и времени

$$J = \int_0^{t_f} \left(1 + \rho |u(t)|\right) dt = t_f + \int_0^{t_f} \rho |u(t)| dt; \quad (8.149)$$

где $\rho > 0$.

Отметим, что во всех рассматриваемых случаях подинтегральное выражение не зависит от x , и следовательно, сопряженная система (8.144) принимает вид

$$\dot{\lambda} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \lambda + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^T u, \quad (8.150)$$

а управляющее воздействие может быть найдено в форме

$$u = U(g^T \lambda), \quad (8.151)$$

где $U(\cdot)$ — функция, подлежащая определению (см. рис. 8.13). Общая структура канонической модели указанных задач оптимального управления представлена на рис. 8.12.

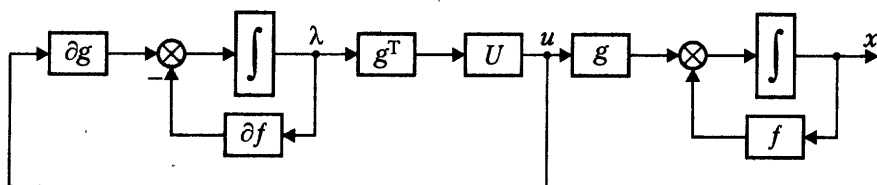


Рис. 8.12. Каноническая модель оптимальных систем

Оптимальное быстроедействие. Для функционала (8.147), соответствующего затратам времени, функция Гамильтона определяется выражением

$$H(x, u, \lambda) = -1 + \lambda^T f(x) + \lambda^T g(x) u. \quad (8.152)$$

Нетрудно показать, что задача не имеет решений на внутренних точках интервала \mathcal{U} , а граничные решения, доставляющие максимум гамильтониану, определяются выражением (рис. 8.13, а)

$$u = \text{sign}(g^T \lambda). \quad (8.153)$$

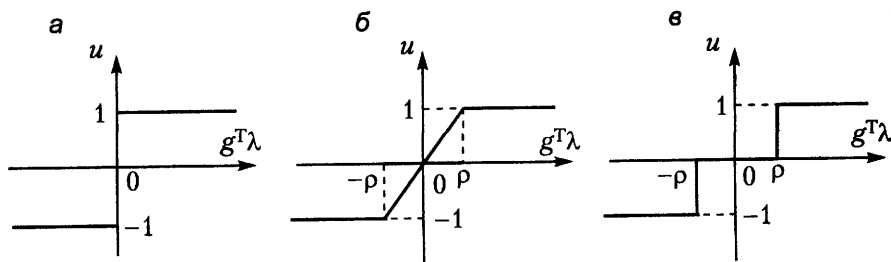


Рис. 8.13. Типовые нелинейные блоки оптимальных систем

Пример 8.9. Рассмотрим задачу синтеза оптимального управления объектом

$$\dot{x} = ax + bu, \quad (8.154)$$

где x и u — скалярные переменные, $b \neq 0$, полагая, что заданы граничные условия $x(0) = x_0$, $x(t_f) = 0$ и функционал затрат времени (8.147). Функция Гамильтона принимает вид

$$H(x, u, \lambda) = -1 + \lambda(ax + bu), \quad (8.155)$$

а уравнение сопряженной системы —

$$\dot{\lambda} = -a\lambda. \quad (8.156)$$

Условие стационарности

$$\frac{\partial H}{\partial u} = b\lambda = 0 \quad (8.157)$$

показывает, что система не имеет нетривиальных стационарных решений. Граничные решения определяются выражением (рис. 8.13, а)

$$u = \text{sign}(b\lambda). \quad (8.158)$$

Подставляя (8.158) в (8.155), получаем наибольшее значение гамильтониана:

$$\mu(x, \lambda) = \max_u H(x, u, \lambda) = -1 + \lambda ax + |\lambda b|. \quad (8.159)$$

Так как время процесса t_f не задано, то для любых $t \geq 0$ выполняется

$$\mu(x, \lambda) = -1 + \lambda ax + |\lambda b| = 0. \quad (8.160)$$

В частности при $t = t_f$ получаем $-1 + |\lambda(t_f)b| = 0$.

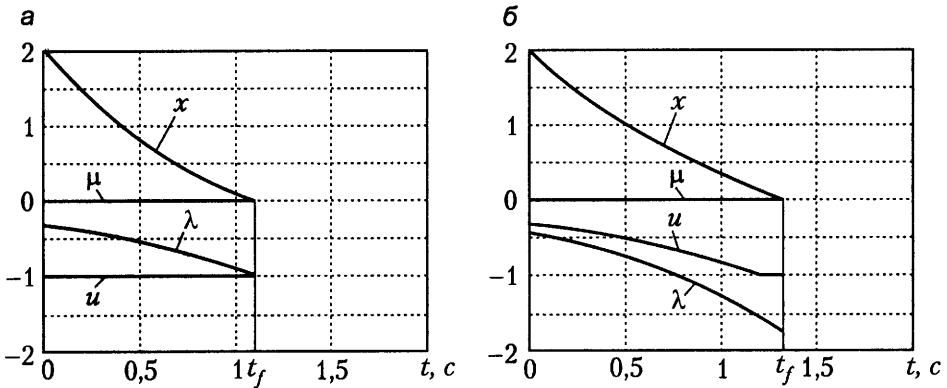


Рис. 8.14. Процессы системы, оптимальной по быстродействию (а, пример 8.9) и оптимальной по затратам энергии (б, пример 8.10)

На рис. 8.14, а для случая $a = -1$, $b = 1$ представлены оптимальные процессы и соответствующая функция Гамильтона $\mu = \max_u H = 0$ при $x(0) = 2$. \square

Оптимальные затраты энергии. Для функционала (8.148) функция Гамильтона определяется выражением

$$H(x, u, \lambda) = -1 - \frac{\rho}{2}u^2 + \lambda^T f(x) + \lambda^T g(x) u. \quad (8.161)$$

Найдем

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\rho u + \lambda^T g, \quad (8.162)$$

и следовательно, стационарные решения определяются выражением

$$u = \frac{1}{\rho} g^T \lambda. \quad (8.163)$$

При $|g^T \lambda| \leq \rho$ управление принимает значения на интервале $[-1, 1]$, и следовательно, полученное решение соответствует отрезку оптимальной траектории. При $|g^T \lambda| > \rho$ наибольшее значение гамильтониана достигается на граничных точках, а управление определяется выражением (8.153). Таким образом, в общем случае оптимальное решение $u^*(t)$ представлено отрезками функций, удовлетворяющих условиям (8.153) и (8.163). Полученные решения можно записать в компактном виде (рис. 8.13, б)

$$u = \text{sat}\left(\frac{1}{\rho} g^T \lambda\right). \quad (8.164)$$

Пример 8.10. Рассмотрим задачу синтеза оптимального управления объектом (8.154), полагая, что заданы граничные условия $x(0) = x_0$, $x(t_f) = 0$ и комбинированный функционал затрат времени и энергии (8.148). Функция Гамильтона принимает вид

$$H(x, u, \lambda) = -1 - \frac{\rho}{2} u^2 + \lambda(ax + bu), \quad (8.165)$$

а уравнение сопряженной системы сохраняет форму (8.156).

Условие стационарности гамильтониана принимает вид

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\rho u + b\lambda = 0, \quad (8.166)$$

и следовательно, стационарные решения находятся из выражения

$$u = \frac{b}{\rho} \lambda. \quad (8.167)$$

При $|b\lambda| \leq \rho$ получаем $u \in [-1, 1]$, и следовательно, решение (8.167) соответствует отрезку оптимальной траектории.

При $|b\lambda| > \rho$ наибольшее значение гамильтониана достигается на граничных точках, а управление определяется выражением (8.158). Таким образом, для оптимального решения $u^*(t)$ можно записать (рис. 8.13, б)

$$u = \text{sat}\left(\frac{b}{\rho} \lambda\right). \quad (8.168)$$

На рис. 8.14, б для случая $a = -1$, $b = 1$ представлены оптимальные процессы и соответствующая функция Гамильтона $\mu = \max_u H = 0$ при $x(0) = 2$. \square

Оптимальный расход топлива. Для функционала (8.149) функция Гамильтона определяется выражением

$$H(x, u, \lambda) = -1 - \rho|u| + \lambda^T f(x) + \lambda^T g(x) u. \quad (8.169)$$

Производная функции претерпевает разрыв в точке $u = 0$. Нетрудно получить, что это решение действительно доставляет максимум H при условии $|g^T \lambda| \leq \rho$.

При $|g^T \lambda| > \rho$ наибольшее значение гамильтониана достигается на граничных точках, а управление определяется выражением (8.153). Таким образом, в общем случае оптимальное решение $u^*(t)$ представлено отрезками $u = 0$ (при $|g^T \lambda| < \rho$), и (8.153). Решение можно записать в компактном виде (рис. 8.13, в)

$$u = \text{dez}\left(\frac{1}{\rho} g^T \lambda\right). \quad (8.170)$$

Пример 8.11. Рассмотрим задачу синтеза оптимального управления объектом (8.154), полагая, что заданы граничные условия $x(0) = x_0$, $x(t_f) = 0$ и комбинированный функционал затрат времени и топлива (8.149). Функция Гамильтона принимает вид

$$H(x, u, \lambda) = -1 - \rho|u| + \lambda(ax + bu), \quad (8.171)$$

а уравнение сопряженной системы сохраняет форму (8.156).

Производная гамильтониана

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\rho \text{sign } u + b\lambda \quad (8.172)$$

претерпевает разрыв в точке $u = 0$. Это решение доставляет максимум H при условии $|b\lambda| \leq \rho$. При $|b\lambda| > \rho$ наибольшее значение гамильтониана достигается в граничных точках, а управление определяется выражением (8.158). Таким образом, для оптимального решения $u^*(t)$ можно записать (рис. 8.13, в)

$$u = \text{dez}\left(\frac{b}{\rho} \lambda\right). \quad (8.173)$$

На рис. 8.15 для случая $a = -1$, $b = 1$ представлены оптимальные процессы и соответствующая функция Гамильтона $\mu = \max_u H = 0$ при $x(0) = 2$. \square

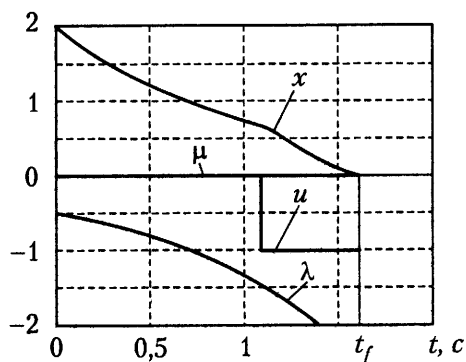


Рис. 8.15. Процессы системы, оптимальной по затратам топлива (пример 8.11)

Отметим, что рассмотренные задачи допускают единственные решения и являются нормальными при условии, что функция $g^T \lambda$ принимает нулевые значения только в изолированные моменты времени.

8.2.3. Оптимальное быстродействие линейных объектов

Рассмотрим линейную систему с одним входом

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (8.174)$$

и функционал оптимального быстродействия

$$J(x, u) = \int_0^{t_f} dt = t_f. \quad (8.175)$$

Здесь u — скалярное управляющее воздействие, удовлетворяющее ограничению

$$|u| \leq 1, \quad (8.176)$$

$t_f > 0$ — время окончания процесса, величина которого не задана.

Функция Гамильтона принимает вид

$$H(x, u, \lambda) = -1 + \lambda^T Ax + \lambda^T Bu, \quad (8.177)$$

где вектор-функция $\lambda = \lambda(t)$ является решением сопряженной системы (рис. 8.16)

$$\dot{\lambda} = -A^T \lambda, \quad (8.178)$$

и следовательно,

$$\lambda = e^{-A^T t} \lambda_0, \quad (8.179)$$

где $\lambda_0 = \lambda(0)$.

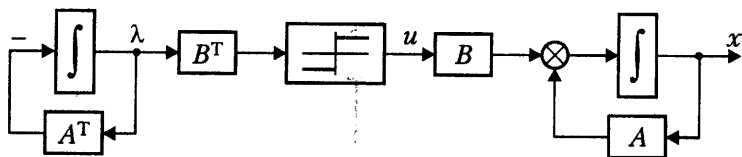


Рис. 8.16. Каноническая система задачи оптимального быстродействия

Решением оптимальной задачи является кусочно-постоянное управление

$$u^* = \text{sign}(B^T \lambda). \quad (8.180)$$

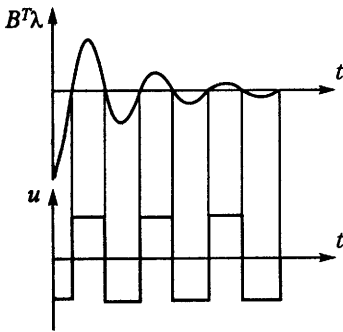
В этом случае функция Гамильтона принимает вид

$$H(x^*, u^*, \lambda) = -1 + \lambda^T A x^* + |\lambda^T B|, \quad (8.181)$$

а в конечной точке имеет место

$$-1 + |\lambda_f^T B| = 0. \quad (8.182)$$

Если условие $\text{sign}(B^T \lambda) = 0$ выполняется только в изолированные моменты времени, то задача не вырождена и имеет единственное оптимальное решение (8.180). Необходимым и достаточным условием невырожденности является полная управляемость пары (A, B) .



Пусть матрица A имеет только вещественные корни:

$$\text{Im } \lambda_i \{A\} = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тогда по теореме Фельдбаума (см. [9]) функция (8.179) имеет не более $n - 1$ корней, т. е. при $t \in [0, \infty)$ переключается не более $n - 1$ раз. При дополнительном условии полной управляемости пары (A, B) это же справедливо и для функции $B^T \lambda(t)$, а следовательно и для управ-

ляющего воздействия $u(t)$, рассчитываемого по формуле (8.180). Таким образом, имеет место следующее положение.

Теорема 8.6 (об n интервалах). Если матрица A имеет только вещественные корни и пара (A, B) полностью управляема, то оптимальное управление принимает граничные значения ± 1 и имеет не более n интервалов постоянства.

Отметим, что при некоторых начальных условиях оптимальное управление может содержать и менее чем n интервалов постоянства (см. пример 8.12).

Пример 8.12. Рассмотрим задачу оптимального быстрогодействия системы второго порядка (см. также примеры 2.5 и 6.2)

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u \quad (8.183)$$

с ограничением на управление (8.176). Нетрудно показать, что система полностью управляема, и в соответствии с теоремой об n интервалах оптимальное управление принимает значения ± 1 и допускает два интервала знакопостоянства.

Напомним, что для постоянных значений управления система имеет решения

$$x_2(t) = x_{20} + ut, \quad x_1(t) = x_{10} + x_{20}t + \frac{u}{2}t^2,$$

и ее фазовые траектории описываются выражением (см. рис. 2.3)

$$x_1 = x_{10} + \frac{x_{20}}{u}(x_2 - x_{20}) + \frac{1}{2u}(x_2 - x_{20})^2. \quad (8.184)$$

Принимая во внимание наличие не более двух интервалов знакопостоянства, следует заключить, что оптимальная фазовая траектория из произвольного начального состояния (x_{10}, x_{20}) в начало координат $(0, 0)$ может быть реализована с помощью следующих импульсных последовательностей:

$$u = 1, -1, \quad (8.185)$$

$$u = -1, 1, \quad (8.186)$$

а также (для определенных начальных состояний) —

$$u = 1, \quad (8.187)$$

$$u = -1. \quad (8.188)$$

Анализ множества фазовых траекторий (8.184) (см. рис. 2.3) показывает, что достижение нулевого конечного состояния за один интервал знакопостоянства управления возможно из точек, принадлежащих отрезкам фазовых траекторий (участкам парабол, рис. 8.17, а)

$$S^+ : x_1 - (+1)\frac{x_2^2}{2} = 0, \quad x_2 < 0$$

и

$$S^- : x_1 - (-1)\frac{x_2^2}{2} = 0, \quad x_2 > 0,$$

полученных при значениях $u = 1$ и $u = -1$ соответственно.

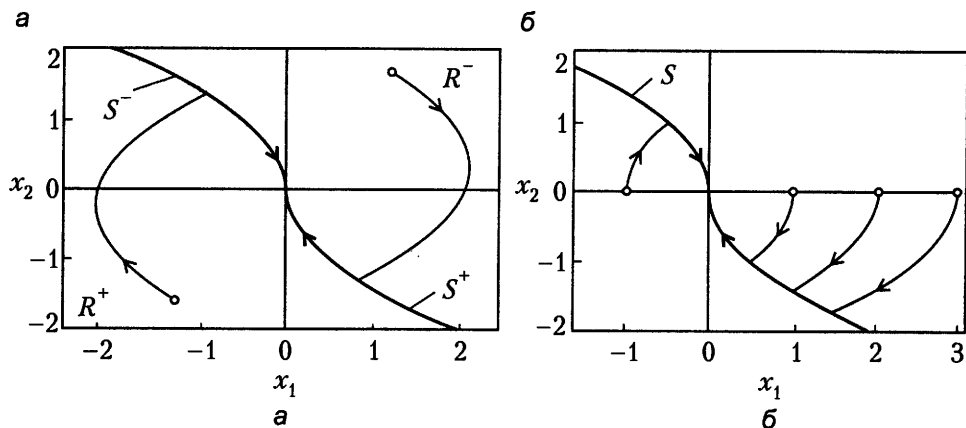


Рис. 8.17. Структура фазовой плоскости и траектории системы, оптимальной по быстрдействию

Определим кривую

$$S = S^+ \cup S^- \cup 0: \quad \phi(x_1, x_2) = 0,$$

где

$$\phi(x_1, x_2) = x_1 + \frac{1}{2}(\text{sign } x_2)x_2^2, \quad (8.189)$$

соответствующую оптимальному переходному процессу, осуществляемому с помощью указанных управлений. Отметим, что кривая S делит фазовую плоскость \mathbb{R}^2 на две области

$$R^+ : \quad \phi(x_1, x_2) < 0,$$

$$R^- : \quad \phi(x_1, x_2) > 0.$$

При этом фазовые траектории, начинающиеся в области R^+ (при $x_0 \in R^+$), достигают начала координат при использовании управляющей последовательности (8.185), а фазовые траектории, начинающиеся в области R^- (при $x_0 \in R^-$), — при использовании управляющей последовательности (8.186). Переключение знака управления происходит точно на кривой S , называемой *оптимальной линией переключений* системы (8.183).

Таким образом, можно сделать вывод, что оптимальное управление рассматриваемым объектом имеет вид:

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in R^+ \cup S^+, \\ -1 & \text{при } x \in R^- \cup S^-. \end{cases} \quad (8.190)$$

Оптимальное управление может быть реализовано с помощью замкнутых алгоритмов управления релейного типа. Первый из них описывается выражением (см. примеры 2.6 и 6.2–6.3)

$$u = -\text{sign } v, \quad (8.191)$$

$$v = k_1 x_1 + k_2 x_2, \quad (8.192)$$

где коэффициенты обратной связи $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ должны выбираться в зависимости от начального состояния системы (8.183). При постоянных значениях коэффициентов регулятор обеспечивает лишь приближенное решение оптимальной задачи и является *квазиоптимальным*.

Второй тип регулятора является *оптимальным* и представлен формулами (8.191) и

$$v = \phi(x_1, x_2), \quad (8.193)$$

или

$$u = -\text{sign}\left(x_1 + \frac{1}{2}(\text{sign } x_2)x_2^2\right). \quad (8.194)$$

Фазовые траектории оптимальной системы представлены на рис. 8.17, б, а кривые оптимальных переходных процессов при $x_0 = 2$ — на рис. 8.18. \square

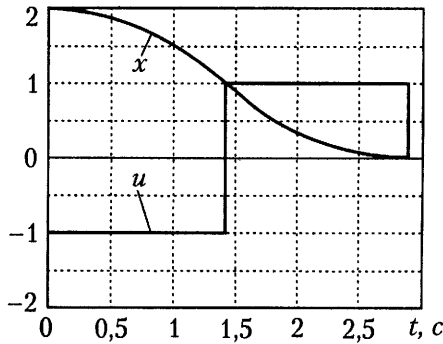


Рис. 8.18. Переходные процессы системы, оптимальной по быстродействию

8.3. Принцип оптимальности и уравнение Беллмана

Принцип оптимальности был разработан в 50-е годы Р. Беллманом для решения многошаговых задач оптимизации дискретных процессов и является основой так называемого *метода динамического программирования* [3, 13]. Формулировка принципа остается справедливой и для систем непрерывного времени, где он часто используется для решения задач оптимального управления, основой чего является уравнение Беллмана. При этом если для стационарных задач управления результаты практически повторяют некоторые формулировки принципа максимума, то для задач управления, в которых описание объекта и функционала содержит функции времени, уравнение Беллмана может служить основой для синтеза нового класса регуляторов.

Сначала рассмотрим нелинейную стационарную систему

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (8.195)$$

и функционал

$$J(x, u) = \int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t)) dt, \quad (8.196)$$

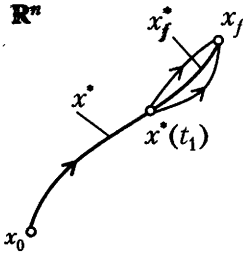
где $x \in \mathbb{R}^n$, $x(0) = x_0$, u — m -мерный вектор управления, удовлетворяющий ограничению

$$u \in \mathcal{U}, \quad (8.197)$$

$t \in [0, t_f]$, f и f^0 — достаточно гладкие функции.

Принцип оптимальности Беллмана. Пусть существует решение задачи оптимального управления (задачи 8.4), т. е. допустимое управление $u = u^*(t)$ и переходный процесс $x = x^*(t)$, доставляющие минимум функционалу $J(x, u)$:

$$\{x^*(t), u^*(t)\} = \arg \min_{u \in \mathcal{U}} J(x, u).$$



Зафиксируем произвольный промежуточный момент времени $t_1 \in (0, t_f)$ и точку оптимальной траектории $x = x^*(t_1)$. Рассмотрим поведение системы (8.195) на интервале $t \in [t_1, t_f]$ и функционал

$$J_f(x, u) = \int_{t_1}^{t_f} f^0(x(t), u(t)) dt, \quad (8.198)$$

полагая, что начальным состоянием является точка $x = x^*(t_1)$. Пусть управление $u = u_f^*(t)$ и переходный процесс $x = x_f^*(t)$ доставляют минимум функционалу $J_f(x, u)$, т. е.

$$\{x_f^*(t), u_f^*(t)\} = \arg \min_{u \in \mathcal{U}} J_f(x, u),$$

где

$$x_f^*(t_1) = x^*(t_1).$$

Запишем

$$J(x, u) = \int_0^{t_1} f^0(x(t), u(t)) dt + J_f(x, u) \quad (8.199)$$

и в силу оптимальности решения $u^*(t), x^*(t)$ —

$$\min_{u \in \mathcal{U}} J(x, u) = \int_0^{t_1} f^0(x^*(t), u^*(t)) dt + J_f(x^*, u^*). \quad (8.200)$$

Так как по определению минимальное значение функционала J_f доставляется функциями $x_f^*(t)$ и $u_f^*(t)$, то оптимальное решение на интервале $[t_1, t_f]$ обеспечивается именно этими функциями.

Таким образом, справедливо следующее положение, соответствующее *принципу оптимальности* для рассматриваемого случая стационарных непрерывных систем.

Теорема 8.7. Если функции $x^*(t)$ и $u^*(t)$ при $t \in [0, t_f]$ доставляют минимум функционалу $J(x, u)$, а функции $x_f^*(t)$ и $u_f^*(t)$ при $t \in [t_1, t_f]$, где $t_1 \in (0, t_f)$ и $x_f^*(t_1) = x^*(t_1)$, — минимум функционалу $J_f(x, u)$, то при $t \in [t_1, t_f]$ имеет место:

$$x^*(t) = x_f^*(t) \quad \text{и} \quad u^*(t) = u_f^*(t).$$

Иными словами, установлено следующее.

Вне зависимости от предшествующего решения оптимальной задачи до произвольного момента $t_1 \in (0, t_f)$ (т. е. предыстории оптимальных процессов), последующие отрезки оптимальных процессов $\{x^(t), u^*(t)\}$ должны доставлять оптимальное решение задаче с начальным состоянием $x^*(t_1)$, полученным в результате оптимизации на предыдущем интервале.*

Принцип оптимальности используется при выводе уравнения Беллмана.

Уравнение Беллмана. Сначала рассмотрим задачу оптимального управления 8.4, т. е. будем искать допустимое управление $u = u^*(t)$, обеспечивающее получение переходного процесса $x = x^*(t)$ объекта управления (8.195) с граничными условиями $x(0) = x_0$ и $x(t_f) = x_f$ и доставляющее минимум функционалу (8.196), полагая, что время окончания процесса $t_f > 0$ не задано. Зафиксируем момент времени $t \in [0, t_f]$ и введем в рассмотрение *функцию Беллмана*

$$S(x(t)) = \min_{u \in \mathcal{U}} \int_t^{t_f} f^0(x(\tau), u(\tau)) d\tau. \quad (8.201)$$

Полагая, что $x(t) = x^*(t)$ и используя принцип оптимальности (теорема 8.7), запишем

$$S(x^*(t)) = \int_t^{t_f} f^0(x^*(\tau), u^*(\tau)) d\tau, \quad (8.202)$$

т. е. функция $S(x)$ представляет собой минимальное значение функционала (8.196) при движении из промежуточной точки $x(t)$ оптимальной траектории. Очевидно, что

$$S(x_0) = \min_{u \in \mathcal{U}} J(x, u), \quad S(x_f) = 0.$$

Функция $S(x)$ обладает следующим свойством.

Теорема 8.8. Если функции $S(x)$ является достаточно гладкой, то она является решением уравнения

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \left(f^0(x, u) + \frac{\partial S}{\partial x} f(x, u) \right) = 0 \quad (8.203)$$

с краевым условием $S(x_f) = 0$.

Для доказательства теоремы рассмотрим момент времени $t + \Delta t$, где $\Delta t > 0$ — малое приращение, и соответствующее значение

$$S(x^*(t + \Delta t)) = \min_{u \in \mathcal{U}} \int_{t+\Delta t}^{t_f} f^0(x(\tau), u(\tau)) d\tau = \int_{t+\Delta t}^{t_f} f^0(x^*(\tau), u^*(\tau)) d\tau. \quad (8.204)$$

Принимая во внимание (8.204) и (8.202), найдем

$$S(x^*(t)) = \int_t^{t+\Delta t} f^0(x^*(\tau), u^*(\tau)) d\tau + S(x^*(t + \Delta t)), \quad (8.205)$$

и следовательно,

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \left(\int_t^{t+\Delta t} f^0(x(\tau), u(\tau)) d\tau + S(x(t + \Delta t)) - S(x(t)) \right) = 0. \quad (8.206)$$

Если функции f^0 и $S(x)$ являются достаточно гладкими, то для малых Δt имеет место

$$\int_t^{t+\Delta t} f^0(x(\tau), u(\tau)) d\tau \simeq f^0(x(t), u(t)) \Delta t, \quad (8.207)$$

$$S(x(t + \Delta t)) - S(x(t)) \simeq \frac{\partial S}{\partial x} \frac{dx}{dt} \Delta t = \frac{\partial S}{\partial x} f(x, u) \Delta t, \quad (8.208)$$

и следовательно,

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \left(f^0(x(t), u(t))\Delta t + \frac{\partial S}{\partial x} f(x, u)\Delta t + o(\Delta t) \right) = 0, \quad (8.209)$$

где $o(\Delta t)/\Delta t \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$. После деления всех слагаемых на Δt и перехода к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ получаем искомое выражение (8.203).

Замечание 8.5. Введем обозначение

$$\lambda(x) = - \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T \quad (8.210)$$

и перепишем уравнение (8.203) в виде

$$\max_{u \in \mathcal{U}} \left(-f^0(x(t), u(t)) + \lambda^T(x) f(x, u) \right) = 0. \quad (8.211)$$

Нетрудно видеть, что выражение (8.211) совпадает с формулой (8.140), полученной для принципа максимума (см. замечание 8.4, 8.2.1). Соответственно, совпадают и способы нахождения оптимального управления. \square

Пример 8.13. Рассмотрим задачу синтеза оптимального управления объектом

$$\dot{x} = u, \quad (8.212)$$

где x и u — скалярные переменные, полагая, что $t_f = \infty$, заданы граничные условия $x(0) = x_0$, $x(\infty) = 0$ и квадратичный функционал качества

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (qx^2 + \rho u^2) dt, \quad (8.213)$$

где $q \geq 0$, $\rho > 0$ (см. также пример 7.7).

Уравнение Беллмана принимает вид

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \left(\frac{1}{2}(qx^2 + \rho u^2) + \frac{\partial S}{\partial x} u \right) = 0, \quad (8.214)$$

где $S(\infty) = 0$. Из условия стационарности минимизируемой функции получаем

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{2}(qx^2 + \rho u^2) + \frac{\partial S}{\partial x} u \right) = \rho u + \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \quad (8.215)$$

и следовательно,

$$u = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial S}{\partial x}. \quad (8.216)$$

После подстановки (8.216) в (8.214), получаем

$$\frac{1}{2}qx^2 + \frac{1}{2\rho} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 = 0, \quad (8.217)$$

и следовательно,

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \sqrt{q\rho} x. \quad (8.218)$$

Подстановка последнего выражения в (8.216) дает искомый алгоритм управления (см. также пример 7.7)

$$u = -\sqrt{\frac{q}{\rho}} x. \quad (8.219)$$

Отметим, что процедура синтеза регулятора не требует нахождения функции S . Тем не менее эта функция может быть легко получена как решение уравнения (8.217) и для краевых условий $S(\infty) = 0$, $x(\infty) = 0$ принимает вид

$$S = \frac{\sqrt{q\rho}}{2} x^2. \quad (8.220)$$

Так как $S(0) = J^*$, то наименьшее значение функционала (8.213) находится как

$$J^* = \frac{\sqrt{q\rho}}{2} x_0^2. \quad (8.221)$$

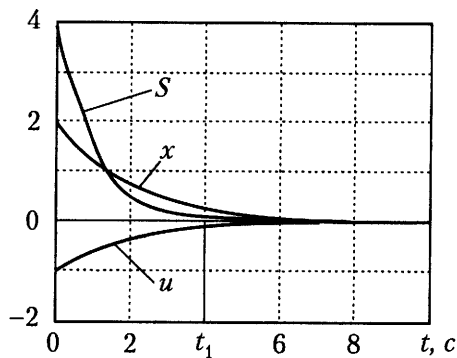


Рис. 8.19. Оптимальные процессы и функция Беллмана (пример 8.12)

Найденные оптимальные решения и функция $S(t)$ для случая $q = 1$, $\rho = 4$ представлены на рис. 8.19. \square

Теперь рассмотрим более общий случай задачи оптимального управления, соответствующий нестационарной системе

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (8.222)$$

и функционалу

$$J(x, u) = \int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t), t) dt, \quad (8.223)$$

где вектор управления u удовлетворяет ограничению (8.197), время окончания процесса $t_f > 0$ фиксировано, а конечное состояние x_f полагается произвольным. Введем в рассмотрение нестационарную функцию

$$S(x(t), t) = \min_{u \in \mathcal{U}} \int_t^{t_f} f^0(x(t), u(t), t) d\tau = \int_t^{t_f} f^0(x^*(t), u^*(t), t) d\tau. \quad (8.224)$$

Функция $S(x, t)$ удовлетворяет уравнению в частных производных, которое называется *уравнением Беллмана*.

Теорема 8.9. Если функции $S(x, t)$ является достаточно гладкой, то она является решением уравнения Беллмана

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \min_{u \in \mathcal{U}} \left(f^0(x, u, t) + \frac{\partial S}{\partial x} f(x, u, t) \right). \quad (8.225)$$

Решение задачи оптимального управления с использованием уравнения Беллмана предусматривает:

а) нахождение управления

$$u^* = U^*\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t\right) \quad (8.226)$$

из условия

$$u^* = \arg \min_{u \in \mathcal{U}} \left(f^0(x, u, t) + \frac{\partial S}{\partial x} f(x, u, t) \right); \quad (8.227)$$

б) решение уравнения в частных производных

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \min_{u \in \mathcal{U}} \left(f^0\left(x, U^*\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t\right), t\right) + \frac{\partial S}{\partial x} f\left(x, U^*\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t\right), t\right) \right) \quad (8.228)$$

и получение функции $S = S(x, t)$;

в) нахождение окончательного алгоритма управления после определения $\partial S / \partial x$ и подстановки в (8.226).

Глава 9. Практикум

Целью практикума является освоение методов исследования нелинейных и оптимальных динамических систем. Практикум включает циклы практических занятий по основным разделам учебного пособия, ориентированные на наглядное подтверждение изучаемых концепций и приобретение навыков анализа и синтеза систем различного типа: Основное содержание занятий составляют расчеты и модельные эксперименты, выполняемые с использованием известных программных средств (см., например, [2, 10]), а также анализ полученных результатов.

9.1. Анализ нелинейных систем

Задание 1.1. Простейшие нелинейные системы

Исследовать системы 1-го порядка

$$\dot{x} = f(x), \tag{9.1}$$

определенные в \mathbb{R}^1 , для следующих функций $f(x)$:

$$-x, \quad x, \quad -x^2, \quad -x - x^2, \quad -x^3, \quad -\sin x, \quad -1/x, \quad -\text{sign } x, \quad \text{sign } x.$$

1. Построить функции $f(x)$ и установить их класс (кусочно-непрерывные, непрерывные, гладкие), определить стационарные и сингулярные точки.
2. Построить графики переходных процессов $x = x(t, x_0)$ для различных значений начальных условий x_0 .
3. Исследовать вопросы существования и единственности решений, а также полноты (существования решений для любых $t \geq 0$).
4. Найти положения равновесия (стационарные точки) $x = x^*$, оценить их устойчивость, показать области притяжения.

Замечание. Следует обратить внимание на следующее:

- а) нелинейные системы могут иметь несколько положений равновесия;
- б) поведение нелинейной системы качественно зависит от начальных условий;
- в) нелинейные системы могут не иметь решений (для определенных начальных условий x_0) или иметь несколько решений для одного и того же значения x_0 ;
- г) решения нелинейных систем не обязательно определены для всех $t \geq 0$;
- д) одна и та же система может иметь неустойчивые, устойчивые и асимптотически устойчивые положения равновесия.

Задание 1.2. Фазовые портреты и особенности нелинейной динамики

Исследовать системы 2-го порядка, содержащие объект управления

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (9.2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(u) \quad (9.3)$$

и линейный регулятор

$$u = -k_1 x_1 - k_2 x_2, \quad (9.4)$$

где k_1, k_2 — коэффициенты обратных связей.

1. Рассмотреть линейную систему, для которой

$$f_2(u) = u. \quad (9.5)$$

По заданным значениям корней

а) $p_1 = -1, p_2 = -3$;

б) $p_1 = -1 + j, p_2 = -1 - j$;

в) $p_1 = j, p_2 = -j$

характеристического полинома

$$a(p) = p^2 + k_2 p + k_1 \quad (9.6)$$

рассчитать коэффициенты обратных связей k_1, k_2 . Найти положения равновесия. Построить фазовые портреты системы в области $x_1 \in [-2, 2], x_2 \in [-2, 2]$.

2. Рассмотреть две гладкие нелинейные системы, для которых

$$f_2(u) = \sin u \quad (9.7)$$

и

$$f_2(u) = u^3, \quad (9.8)$$

а коэффициенты обратной связи k_1, k_2 выбраны, как указано в п. 1 (варианты $a, б, в$).

3. Найти положения равновесия. Построить фазовые портреты систем в области $x_1 \in [-3, 3], x_2 \in [-2, 2]$. В нескольких точках (x_1, x_2) построить векторы

$$f = \begin{vmatrix} x_2 \\ f_2(x_1, x_2) \end{vmatrix},$$

соответствующие векторным полям рассматриваемых систем.

4. Оценить устойчивость систем, отметить области притяжения, указать типы переходных процессов (апериодические, колебательные, затухающие, незатухающие), указать характерные линии фазовой плоскости (инвариантные множества, аттракторы).

Задание 1.3. Фазовые траектории релейных систем и метод приспособывания (см. также задание 4.1, п. 9.4).

Исследовать системы 2-го порядка, содержащие объект управления

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (9.9)$$

$$\dot{x}_2 = u, \quad (9.10)$$

и регуляторы вида

$$u = f_2(v), \quad (9.11)$$

$$v = -k_1 x_1 - k_2 x_2. \quad (9.12)$$

Выбрать коэффициенты обратных связей

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 0.25$$

и рассмотреть:

а) релейный регулятор, где

$$u = \text{sign } v; \quad (9.13)$$

б) релейный регулятор с зоной нечувствительности, где

$$u = \text{dez } \frac{v}{\delta}, \quad (9.14)$$

$\delta = 0.2$;

в) релейный регулятор с гистерезисом, где

$$u = \text{hys } \frac{v}{\delta}, \quad (9.15)$$

$$\delta = 0.2.$$

1. Найти уравнения фазовых траекторий объекта управления (9.9)–(9.10) при постоянных значениях управления

$$u = -1, 0, 1.$$

Построить фазовые портреты в диапазоне $x_1 \in [-2, 2]$, $x_2 \in [-2, 2]$.

2. Методом припасовывания построить фазовые траектории замкнутых систем с регуляторами (9.11)–(9.12) из начальных точек $x_{10} = 0.5, 1, 1.5, 2$, $x_{20} = 0$ (по 4 траектории). Для этого найти линии переключения, выделить области постоянства управления u и воспользоваться полученными ранее траекториями объекта управления.

3. На фазовых портретах показать линии переключения, выделить области знакопостоянства управления, показать стационарные точки (множества).

Задание 1.4. Устойчивость нелинейных систем

1. Исследовать нелинейную систему

$$\dot{x}_1 = -x_2 - \alpha(1 - x_1^2 - x_2^2)x_1, \quad (9.16)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - \alpha(1 - x_1^2 - x_2^2)x_2, \quad (9.17)$$

где

а) $\alpha = 0.05$;

б) $\alpha = -0.1$.

Рассчитать положения равновесия. Построить фазовые портреты в области $x_1 \in [-2, 2]$, $x_2 \in [-2, 2]$. Проанализировать устойчивость системы, определить типы положений равновесия (узлы, центры, фокусы, седловые точки), показать области притяжения.

2. Исследовать нелинейные системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (9.18)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 - 25(x_1 - 1.4x_1^3 + 0.27x_1^5) \quad (9.19)$$

и

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (9.20)$$

$$\dot{x}_2 = -25(x_1 - 1.4x_1^3 + 0.27x_1^5). \quad (9.21)$$

Рассчитать положения равновесия, построить фазовые портреты в области $x_1 \in [-3, 3]$, $x_2 \in [-10, 10]$. Проанализировать устойчивость систем, определить типы положений равновесия (узлы, центры, фокусы, седловые точки), показать области притяжения.

3. Исследовать нелинейную систему

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_2^2, \quad (9.22)$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1x_2, \quad (9.23)$$

где $x_1 \in [-2, 2]$, $x_2 \in [-2, 2]$. Найти положение равновесия, построить фазовый портрет, проанализировать аттрактивность и устойчивость положения равновесия.

Задание 1.5. Инвариантные множества и частичная устойчивость

1. Исследовать нелинейную систему

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_1x_2, \quad (9.24)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 \quad (9.25)$$

с выходом

$$y = x_1 \quad (9.26)$$

в области $x_1 \in [-2, 2]$, $x_2 \in [-1, 1]$.

2. Исследовать нелинейную систему (9.16)-(9.17) с выходом

$$y = 1 - x_1^2 - x_2^2 \quad (9.27)$$

(см. задание 1.4).

3. Исследовать нелинейную систему

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1 + x_1^3 + x_2, \quad (9.28)$$

$$\dot{x}_2 = -3x_1^2(\alpha x_1 + x_1^3 + x_2) - 4(x_1^3 + x_2) \quad (9.29)$$

с выходом

$$y = x_1^3 + x_2, \quad (9.30)$$

где

а) $\alpha = 0.2$,

б) $\alpha = -1$.

4. Рассчитать положения равновесия.

5. Построить фазовые портреты и переходные процессы выходных переменных $y(t)$. Показать инвариантные множества, аттракторы, предельные циклы.

6. Проанализировать устойчивость и частичную устойчивость (по выходу), показать области притяжения.

Задание 1.6. Абсолютно устойчивые системы

Исследовать нелинейную систему, состоящую из *линейного блока*

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (9.31)$$

$$\dot{x}_2 = -3x_1 - x_2 + u \quad (9.32)$$

с входом u и выходом

$$y = x_1, \quad (9.33)$$

и *нелинейного статического блока*

$$u = f_2(v) = a \sin v, \quad (9.34)$$

$$v = -y, \quad (9.35)$$

где a — коэффициент. Проанализировать устойчивость системы при различных значениях a .

1. Найти положения равновесия системы.
2. Построить типовые переходные процессы $y(t)$ для начальных условий $x_1(0) = 5$, $x_2(0) = 0$ и

$$a \in [-5, 15].$$

3. Получить секторные условия, т. е. найти значения параметров k_1, k_2 :

$$k_1 \leq \frac{f_2(v)}{v} \leq k_2,$$

соответствующие границам устойчивости системы относительно точки $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

4. Построить графики функции $f_2(v)$, соответствующие предельно допустимым значениям коэффициента a .

Задание 1.7. Гиперустойчивые системы

Исследовать нелинейную систему, состоящую из *линейного блока*

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (9.36)$$

$$\dot{x}_2 = -3x_1 - 4x_2 + u \quad (9.37)$$

с входом u и выходом

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2, \quad (9.38)$$

и динамического блока

$$u = r(t)z, \quad (9.39)$$

$$\dot{z} = 4r(t)y, \quad (9.40)$$

$$v = -y, \quad (9.41)$$

где

$$r(t) = \sin 5t.$$

Проанализировать устойчивость системы для различных параметров уравнения выхода (9.38):

а) $c_1 = 1, \quad c_2 = 0;$

б) $c_1 = 1.5, \quad c_2 = 1.$

1. Найти положения равновесия системы.
2. Для начальных условий $x_1(0) = 5, x_2(0) = 0, z(0) = 0$ построить переходные процессы $y(t), z(t), r(t)$.
3. Найти передаточные функции линейной части $W(s)$, рассчитать нули и полюсы системы, построить годографы $W(j\omega)$ (АФЧХ).
4. Обосновать полученные результаты.

9.2. Синтез нелинейных систем

Задание 2.1. Преобразование координат и эквивалентные модели

Построить модели, эквивалентные системе первого порядка

$$\dot{x} = -\frac{1}{x}, \quad (9.42)$$

определенной на множестве $x \in (0, \infty)$ и имеющей решения

$$x = \sqrt{x_0^2 - 2t}.$$

1. Осуществить преобразование координат

$$\xi_1 = \frac{x^2}{2}, \quad (9.43)$$

получить эквивалентную модель, найти решения $\xi_1 = \xi_1(t, \xi_{10})$ и проверить эквивалентность систем.

2. Осуществить преобразование координат

$$\xi_2 = x^3, \quad (9.44)$$

получить эквивалентную модель, найти решения $\xi_2 = \xi_2(t, \xi_{20})$ и проверить эквивалентность систем.

3. Построить переходные процессы $x(t, x_0)$, $\xi_1(t, \xi_{10})$ и $\xi_2(t, \xi_{20})$. Проверить полноту и устойчивость основной и преобразованных систем.

Замечание. Ввиду особых свойств модели (9.42) эквивалентность рассматриваемых систем имеет место в ограниченных множествах и на ограниченных интервалах времени.

Задание 2.2. Преобразование к нормальной форме

Исследовать следующие системы (объекты управления) второго порядка.

ОУ1:

$$\dot{x}_1 = -x_1^2 + x_2, \quad (9.45)$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1x_2 + (x_2 + 1)u \quad (9.46)$$

с выходом

$$y = x_2; \quad (9.47)$$

ОУ2:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + x_1^3 + x_2, \quad (9.48)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (9.49)$$

с выходом

$$y = x_1^3 + x_2 \quad (9.50)$$

для случаев, когда

$$f_1 = x_1, \quad -x_1, \quad 1, \quad -x_1^2;$$

ОУ3:

$$\dot{x}_1 = -\alpha x_2^2 - x_1 u, \quad (9.51)$$

$$\dot{x}_2 = \alpha x_1 x_2 - x_2 u \quad (9.52)$$

с выходом

$$y = 1 - x_1^2 - x_2^2 \quad (9.53)$$

для случаев, когда

$$\alpha = -1, \quad 0, \quad 1.$$

Найти относительную степень каждой системы, привести системы к нормальной форме и проанализировать устойчивость нулевой динамики.

Замечание. Для ОУ1–ОУ2 следует выбрать

$$z = x_1,$$

а для ОУ3 —

$$z = \text{Arctg} \frac{x_2}{x_1}.$$

Задание 2.3. Точная линейризация и стабилизация выхода

Рассмотреть объекты ОУ1–ОУ3 из задания 2.2.

1. Найти линейризирующие управления (алгоритмы точной линейризации).
2. Стабилизировать системы относительно выхода $y = 0$, обеспечив время переходного процесса $t_n = 1$ с.
3. Проанализировать полноту и устойчивость замкнутых систем.
4. Построить фазовые портреты и переходные процессы выходных переменных $y(t)$. Показать инвариантные множества, аттракторы и области притяжения, проанализировать частичную устойчивость (по выходу).

Задание 2.4. Попятный синтез и стабилизация каскадных систем

Исследовать объект ОУ1 из задания 2.2.

1. Найти виртуальное управление

$$x_2 = U(x_1),$$

обеспечивающее стабилизацию подсистемы (9.45) и время переходного процесса $t_{n1} = 1$ с.

2. Ввести в рассмотрение ошибку

$$e = x_2 - U(x_1)$$

и найти преобразованную модель системы в координатах (x_1, e) .

3. Найти управляющее воздействие u , обеспечивающее стабилизацию ошибки и время переходного процесса $t_{ne} = 0.3$ с.
4. Построить графики переходных процессов $x_1(t)$ и $e(t)$ для случаев использования виртуального и реального управления.

5. Построить фазовый портрет и сравнить его с полученным для ОУ1 в заданиях 2.2–2.3. Показать инвариантные множества и аттракторы. Проанализировать устойчивость и частичную устойчивость (по функции e), показать области притяжения.

Задание 2.5. Попятный синтез и стабилизация выхода

Исследовать объект ОУ2 из заданий 2.2–2.3 при $f_1 = -x_1^2$.

1. Записать нормальную форму системы, т. е. уравнения внешней динамики $\xi(t)$ и внутренней (нулевой) динамики $z(t)$, выбрав

$$z = x_1.$$

2. Осуществить точную линеаризацию системы (см. задания 2.2–2.3).

3. Для нормальной формы найти виртуальное управление

$$\xi = U(z),$$

обеспечивающее стабилизацию нуль-динамики и заданное время переходного процесса $t_{п1} = 1$ с.

4. Ввести в рассмотрение ошибку

$$e = \xi - U(z)$$

и найти преобразованную модель системы в координатах (z, e) .

5. Найти управляющее воздействие \tilde{u} , обеспечивающее стабилизацию ошибки и заданное время переходного процесса $t_{пе} = 0.3$ с.

6. Построить графики переходных процессов $z(t)$ и $e(t)$.

7. Построить фазовые портреты системы и сравнить их с полученными для ОУ2 ($f_1 = -x_1^2$) при выполнении заданий 2.2–2.3.

8. Показать инвариантные множества и аттракторы. Проанализировать устойчивость и частичную устойчивость системы.

9.3. Согласованное управление и траекторные задачи

Задание 3.1. Линейные условия согласования

Исследовать двухканальную систему, состоящую из двух независимых объектов управления первого порядка

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + u_1, \quad (9.54)$$

$$\dot{x}_2 = x_2^2 + u_2 \quad (9.55)$$

с входами u_1, u_2 и выходами

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2. \quad (9.56)$$

Условия согласования заданы в виде тождества $y_1 = y_2$, или

$$y_1 - y_2 = 0, \quad (9.57)$$

а обобщенная (усредненная) переменная —

$$s = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (9.58)$$

1. Построить задачно-ориентированную модель системы.
2. Синтезировать алгоритм управления, обеспечивающий согласование движений за время переходного процесса $t_n = 0.5$ с и получение обобщенной (усредненной) скорости $\dot{s} = V_s^* = 1$.
3. Построить фазовый портрет и графики переходных процессов выходных переменных $y_1(t), y_2(t)$. Показать инвариантные множества и аттракторы. Проанализировать устойчивость и частичную устойчивость системы.

Задание 3.2. Нелинейные условия согласования

Рассмотреть нелинейную систему (9.54)–(9.56) и условия согласования вида

$$-y_1^2 - y_1 + y_2 = 0. \quad (9.59)$$

Усредненная переменная определяется выражением (9.58).

1. Построить задачно-ориентированную модель системы.
2. Синтезировать алгоритм управления, обеспечивающий согласованное движение за времени переходного процесса $t_n = 0.5$ с и получение обобщенной (усредненной) скорости $V_s^* = 1$.
3. Построить фазовый портрет и графики переходных процессов выходных переменных $y_1(t), y_2(t)$. Показать инвариантные множества и аттракторы. Проанализировать устойчивость и частичную устойчивость системы.

Задание 3.3. Прямолинейное движение

Рассмотреть систему (9.54)–(9.56) и прямую, заданную уравнением

$$-\sin \alpha^* y_1 + \cos \alpha^* y_2 + \varphi_0 = 0, \quad (9.60)$$

длина которой определяется выражением

$$s = \cos \alpha^* y_1 + \sin \alpha^* y_2 + \psi_0. \quad (9.61)$$

Здесь $\alpha^* = \text{const}$, $\varphi_0 = \text{const}$, $\psi_0 = \text{const}$.

1. Найти матрицу Якоби

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{vmatrix} \partial \psi / \partial x \\ \partial \varphi / \partial x \end{vmatrix}$$

и показать, что прямая задана в нормализованной форме.

2. Построить задачно-ориентированную модель системы.

3. Синтезировать алгоритм управления, обеспечивающий компенсацию отклонения

$$e = -\sin \alpha^* y_1 + \cos \alpha^* y_2 + \varphi_0 \quad (9.62)$$

за время переходного процесса $t_n = 0.5$ с и получение обобщенной (контурной) скорости $V_s^* = 1$.

4. Для случая $\alpha^* = \pi/6$, $\varphi_0 = 0.5$, $\psi_0 = 0$ построить фазовый портрет. Показать инвариантные множества и аттракторы.

Задание 3.4. Движение по окружности

Рассмотреть систему (9.54)–(9.56) и окружность, заданную уравнением

$$\frac{1}{2R}(R^2 - \Delta y_1^2 - \Delta y_2^2) = 0, \quad (9.63)$$

где $R = \text{const}$, $\Delta y_1 = y_1 - y_1^0$; $\Delta y_2 = y_2 - y_2^0$, длина дуги которой определяется как

$$s = R \text{Arctg} \frac{\Delta y_2}{\Delta y_1}. \quad (9.64)$$

1. Найти матрицу Якоби

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(\Delta y_1, \Delta y_2)$$

и ее значение для точек (y_1, y_2) , удовлетворяющих уравнению (9.63). Показать, что окружность задана в нормализованной форме.

2. Построить задачно-ориентированную модель системы.

3. Синтезировать алгоритм управления, обеспечивающий компенсацию отклонения

$$e = \frac{1}{2R}(R^2 - \Delta y_1^2 - \Delta y_2^2) \quad (9.65)$$

за время переходного процесса $t_n = 0.5$ с и получение обобщенной (контурной) скорости $V_s^* = 1$.

4. Для случая $R = 1$, $\Delta y_1 = \Delta y_2 = 1.2$ построить фазовый портрет. Показать инвариантные множества и аттракторы.

Задание 3.5. Синхронизация колебательных систем

Исследовать два идентичных маятника, описываемых уравнениями

$$\ddot{y}_1 + \omega_0^2 y_1 = u_1, \quad (9.66)$$

$$\ddot{y}_2 + \omega_0^2 y_2 = u_2, \quad (9.67)$$

где $\omega_0 > 0$. Условия согласования (синхронизации) заданы в форме (9.57), а усредненная переменная определяется выражением (9.58).

1. Привести систему к форме вход-состояние-выход и построить задачно-ориентированную модель.

2. Синтезировать алгоритм управления, обеспечивающий синхронизацию маятников и усредненное движение, заданное эталонной моделью (осциллятором)

$$\ddot{s}^* + \omega^2 s^* = 0, \quad s^*(0) = 1, \quad \dot{s}^*(0) = 0, \quad (9.68)$$

где $\omega > \omega_0$.

3. Для случая $\omega = 2$, $\omega_0 = 0.5$ построить фазовый портрет, а также графики переходных процессов разомкнутой и замкнутой систем. Показать инвариантные множества и аттракторы. Проанализировать устойчивость и частичную устойчивость.

Задание 3.6. Управление круговым движением динамической модели

Рассмотреть двухканальную линейную систему 4-го порядка

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (9.69)$$

$$\dot{x}_2 = u, \quad (9.70)$$

$$y = x_1, \quad (9.71)$$

где $x_i = (x_{i1}, x_{i2})$, $y = (y_1, y_2)$, $u = (u_1, u_2)$, и окружность, представленную в нормализованной форме (9.63)–(9.64) (см. также задание 3.4).

1. Построить задачно-ориентированную модель системы.

2. Синтезировать алгоритм управления, обеспечивающий устойчивое движение по окружности с контурной скоростью $\dot{s} = V_s^* = 1$.

3. Для случая $R = 1$, $\Delta y_1 = \Delta y_2 = 1.2$ построить фазовый портрет. Показать инвариантные множества и аттракторы.

9.4. Релейные системы

Задание 4.1. Релейное управление системой второго порядка

Исследовать систему 2-го порядка, содержащую объект управления

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (9.72)$$

$$\dot{x}_2 = u, \quad (9.73)$$

и релейные регуляторы (см. также п. 9.1, задание 1.3).

1. Осуществить моделирование и проанализировать поведение замкнутой системы с релейным регулятором

$$u = -\text{sign } v, \quad (9.74)$$

$$v = k_1 x_1 + k_2 x_2 \quad (9.75)$$

при различных значениях коэффициентов обратной связи

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 0, 0.25, 0.5, 1.$$

Построить фазовые портреты системы, представленные траекториями из начальных точек $x_{10} = 0.5, 1, 1.5, 2$, $x_{20} = 0$, для всех указанных значений коэффициентов.

4. Для начальных условий $x_{10} = 1$, $x_{20} = 0$ и всех указанных значений коэффициентов построить графики переходных процессов $x_1(t)$ и $u(t)$.

5. На фазовых портретах показать линии переключения, выделить области знакопостоянства управления, показать векторные поля системы (векторы $f = (x_2, u)$) до и после пересечения линии переключения, дать характеристику переходных процессов (апериодический, колебательный и т. д.), показать скользящие режимы.

6. Найти кривую (оптимальную линию переключения), обеспечивающую наискорейшее достижение начала координат из всех начальных точек. Построить оптимальный (по быстродействию) регулятор и получить фазовый портрет оптимальной системы (см. также п. 9.4, задание 5.6, б).

Задание 4.2. Релейное управление возмущенной системой

Исследовать возмущенную систему первого порядка

$$\dot{x} = \beta b (u + w), \quad (9.76)$$

$$u = -\text{sign } x, \quad (9.77)$$

где $x(0) = 1$, $b = \text{const} > 0$, β — варьируемый параметр,

$$w = A \sin \Omega t$$

— сигнальное возмущение с параметрами $A > 0$ и $\Omega = \text{const} > 0$.

1. Построить переходные процессы $x(t)$, $u(t)$ невозмущенной системы: $\beta = 1$, $w = 0$. Проверить условия скользящего режима, определить эквивалентное управление, оценить устойчивость нулевого положения равновесия.
2. Полагая $w = 0$, построить переходные процессы $x(t)$, $u(t)$ параметрически возмущенной системы для нескольких значений параметра β . Найти область изменения β , в которой сохраняются условия скользящего режима, определить эквивалентное управление и оценить устойчивость системы.
3. Полагая $\beta = 1$, построить переходные процессы $x(t)$, $u(t)$, $w(t)$ сигнально возмущенной системы для нескольких значений параметра A . Найти область значений $w(t)$, в которой сохраняются условия скользящего режима, определить эквивалентное управление, оценить устойчивость системы.

9.5. Оптимальное управление

Задание 5.1. Исследование быстродействия линейного объекта

Найти управляющие воздействия, обеспечивающие достижение наилучшего быстродействия линейного объекта управления

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad (9.78)$$

$$y = x_1, \quad (9.79)$$

где $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$ (см. также задание 5.6, б).

5.1 а (задача без ограничений)

Воспользоваться линейным регулятором

$$u = -k_1 x_1 - k_2 x_2 \quad (9.80)$$

и найти значения коэффициентов обратной связи k_1 , k_2 , соответствующие переходному процессу $y(t)$ с заданным перерегулированием $\sigma = 20\%$ и наименьшим временем переходного процесса t_n .

1. Выбрать начальные значения $k_1 = 5$, $k_2 = 2$, при которых достигается заданное значение перерегулирования. По графику $y(t)$ определить значение t_n .
2. Последовательно увеличивать k_1 и подбирая новые значения k_2 , при которых обеспечивается $\sigma = 20\%$, определить соответствующие значения t_n . Полученные значения коэффициентов и времени переходного процесса t_n свести в таблицу и построить зависимость k_2 от k_1 .
3. Построить графики переходных процессов $y(t)$, $u(t)$, соответствующие начальным, средним и «наилучшим» значениям параметров регулятора.
4. Пояснить полученные результаты.

5.1 б (задача с ограничениями на управление)

Воспользоваться релейным регулятором

$$u = -\text{sign}(k_1 x_1 + k_2 x_2) \quad (9.81)$$

и найти значения коэффициентов k_1 , k_2 , обеспечивающие перевод системы из начального состояния $x_{10} = 1$, $x_2(0) = 0$ в точку $(0, 0)$ за минимальное время t_f .

1. Выбрать $k_1 = 1$ и подобрать значение коэффициента k_2 , обеспечивающее получение наименьшего значения t_f .
2. Построить фазовый портрет и графики переходных процессов $x_1(t)$, $u(t)$.
3. Пояснить полученные результаты.

Задание 5.2. Нахождение условного экстремума функции

Найти значения x_1 и x_2 , при которых достигается минимум функции

$$y = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2$$

при ограничении (условии)

$$x_1 - x_2 - C = 0,$$

где a_1 , a_2 , C — заданные константы. Рассчитать минимальное значение y . Построить график.

Задание 5.3. Нахождение экстремума функционала

1. Найти уравнение линии $y^*(x)$, соответствующей кратчайшему пути $l(y)$ между заданными точками $(x_0, y(x_0))$ и $(x_f, y(x_f))$. Рассчитать путь $l^* = l(y^*)$ и построить график.

2. Найти уравнение линии $y^*(x)$, соответствующей кратчайшему пути $l(y)$ между прямой

$$S_0: y = k_1 x + k_0$$

и ближайшим отрезком окружности

$$S_f: x^2 + y^2 = R^2,$$

где k_1 , k_0 , R — заданные константы. Рассчитать путь $l^* = l(y^*)$ и построить график.

Задание 5.4. Нахождение условного экстремума функционала в задачах оптимального управления

5.4 а (задача минимизации интегрального квадратичного критерия)

Найти экстремум функционала

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (qx^2 + \rho u^2) dt \quad (9.82)$$

при ограничении (условии), вводимом уравнением объекта управления

$$\dot{x} = ax + bu, \quad (9.83)$$

где $x(0) = x_0$, $x(\infty) = 0$; $q \geq 0$, $\rho > 0$, a , b — заданные константы.

1. Получить каноническую систему уравнений.
2. Для различных значений $\lambda(0)$ построить фазовые траектории в пространстве (x, λ) и найти оптимальную. Построить оптимальные переходные процессы $x^*(t)$, $u^*(t)$, $\lambda(t)$.
3. Получить замкнутый алгоритм управления

$$u = kx, \quad (9.84)$$

рассчитать k и определить минимальное значение функционала J^* .

4. Построить оптимальные переходные процессы замкнутой системы $x^*(t)$, $u^*(t)$.

5.4 б (задача о мягкой посадке)

Минимизировать функционал затрат энергии

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^2 dt \quad (9.85)$$

при ограничениях, вводимых уравнениями движения материальной точки

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad m\dot{x}_2 = u - mg, \quad (9.86)$$

где $x_1(0) = x_0 = 1$, $x_2(0) = x_0 \leq 0$, $x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$, $g = 9.8$; t_f , m , x_{20} — заданные константы.

1. Получить каноническую систему уравнений и из условий задачи найти начальные значения $\lambda_1(0)$, $\lambda_2(0)$.
2. Построить оптимальную фазовую траекторию в пространстве (x_1, x_2) и переходные процессы $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$, $u^*(t)$.
3. Рассчитать минимальное значение функционала J^* .

Задание 5.5. Синтез управления в задачах ЛКР**5.5 а (терминальная задача оптимального управления)**

Для объекта управления

$$\dot{x} = ax + bu \quad (9.87)$$

найти управление $u(t)$, доставляющее минимум квадратичному функционалу

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (qx^2 + u^2) dt, \quad (9.88)$$

где $t_f = 1$, $x(0) = x_0 = 1$, $x(t_f) = 0$; $q > 0$, a, b — заданные константы.

1. Получить каноническую систему уравнений и из условий задачи найти начальное значение $\lambda(0)$.
2. Для различных значений $\lambda(0)$ построить фазовые траектории в пространстве (x, λ) и найти оптимальную. Построить оптимальные переходные процессы $x^*(t)$, $u^*(t)$, $\lambda(t)$.
3. Получить уравнение Риккати и замкнутый алгоритм управления

$$u = k(t)x. \quad (9.89)$$

Рассчитать минимальное значение функционала J^* .

4. Построить переходные процессы замкнутой системы $x^*(t)$, $u^*(t)$, $k(t)$.

5.5 б (задача оптимального управления со свободным правым концом)

Для объекта управления (9.87) найти управление $u(t)$, доставляющее минимум функционалу

$$J = \frac{1}{2} x_f^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (qx^2 + u^2) dt, \quad (9.90)$$

где $t_f = 1$, $x(0) = x_0 = 1$, $x_f = x(t_f)$ не задано; $q > 0$, a, b — заданные константы.

1. Получить каноническую систему уравнений и используя условие трансверсальности найти значения $\lambda(0)$, $\lambda(t_f)$ и x_f .
2. Для различных значений $\lambda(0)$ построить фазовые траектории в пространстве (x, λ) и найти оптимальную. Построить оптимальные переходные процессы $x^*(t)$, $\lambda(t)$, $u^*(t)$.
3. Получить уравнение Риккати и замкнутый алгоритм управления (9.89). Рассчитать минимальное значение функционала J^* .
4. Построить переходные процессы замкнутой системы $x^*(t)$, $u^*(t)$, $k(t)$.

5.5 в (задача линейного квадратичного регулирования 1)

Для объекта управления

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = bu, \quad (9.91)$$

$(x_1, x_2) = x \in \mathbb{R}^2$, $(x_1(0), x_2(0)) = (x_{10}, x_{20}) = x_0$ найти линейный алгоритм управления вида

$$u = k_1 x_1 + k_2 x_2, \quad (9.92)$$

обеспечивающий для любых начальных состояний $x_0 \in \mathbb{R}^2$ получение наименьших значений квадратичного функционала

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + \rho u^2) dt, \quad (9.93)$$

где $\rho > 0$, $Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{vmatrix}$, а $q > 0$, b — заданные константы. Проанализировать асимптотические свойства оптимальной системы.

1. Найти решение уравнения Риккати $P > 0$ и матрицу обратной связи $K = [k_1 \ k_2]$ при $\rho = 1$. Рассчитать полюсы разомкнутой и замкнутой систем.
2. Построить корневые годографы замкнутой системы по параметру $\rho \in (0, \infty)$.
3. Построить типовые оптимальные переходные процессы $x^*(t)$ и $u^*(t)$ для трех значений параметра ρ и найти значения J^* .

5.5 г (задача линейного квадратичного регулирования 2)

Для объекта управления

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = bu, \quad (9.94)$$

$$y = x_1 + qx_2 \quad (9.95)$$

$(x_1, x_2) = x \in \mathbb{R}^2$, $(x_1(0), x_2(0)) = (x_{10}, x_{20}) = x_0$ найти линейный алгоритм управления вида (9.92), обеспечивающий для любых начальных состояний $x_0 \in \mathbb{R}^2$ получение наименьших значений квадратичного функционала

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (y^2 + \rho u^2) dt, \quad (9.96)$$

где $\rho > 0$, а $q > 0$, b — заданные константы. Проанализировать асимптотические свойства оптимальной системы.

Замечание. Рассматриваемая задача сводится к задаче 5.5, в, где $Q = \begin{vmatrix} 1 & \\ & q \end{vmatrix} |1 \ q|$.

Задание 5.6. Задачи оптимального быстродействия**5.6 а (оптимальное управление объектом первого порядка)**

Для нелинейного объекта управления

$$\dot{x}_1 = -ax^3 + bu, \quad (9.97)$$

где $x(0) = 1$, a, b — заданные константы, найти управление $u(t)$, которое удовлетворяет ограничению

$$|u| \leq 1, \quad (9.98)$$

обеспечивает перевод системы в точку $x = 0$ и доставляет минимум функционалу затрат времени

$$J = \int_0^{t_f} dt = t_f. \quad (9.99)$$

1. Получить каноническую систему уравнений.
2. Записать гамильтониан $H(x, u, \lambda)$, найти оптимальный закон управления $u^* = u^*(\lambda)$ и допустимые значения $\lambda_f = \lambda(t_f)$.
3. Построить типовые переходные процессы $x(t)$, $\lambda(t)$, $u(t)$, $H(t)$, соответствующие различным значениям λ_f , и найти оптимальные решения.

5.6 б (оптимальное управление объектом второго порядка)

Для линейного объекта управления

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad (9.100)$$

где $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$, найти управление, которое удовлетворяет ограничению (9.98), обеспечивает перевод системы в начало координат $(0, 0)$ и доставляет минимум функционалу затрат времени (9.99) (см. также задание 5.1).

1. Построить фазовые траектории в пространстве (x_1, x_2) при $u = \pm 1$ и с их помощью найти *графически* оптимальные траектории из заданных точек (x_{10}, x_{20}) .
2. Построить квази-оптимальный (релейный) регулятор

$$u = -\text{sign}(k_1 x_1 + k_2 x_2), \quad (9.101)$$

где k_1, k_2 — коэффициенты обратной связи. Выбрать $k_1 = 1$ и для ряда начальных состояний $x_{10} \in [-2, 2]$, $x_{20} = 0$ подобрать значения коэффициента k_2 , обеспечивающие получение наименьших значений t_f . Полученные значения свести в таблицу и построить линии переключения. Получить фазовый портрет оптимальной системы и графики переходных процессов $x_1^*(t)$, $u^*(t)$.

3. Найти оптимальную линию переключения, построить оптимальный (по быстродействию) регулятор. Получить фазовый портрет оптимальной системы и графики переходных процессов $x_1^*(t)$, $u^*(t)$ из точек $x_{10} \in [-2, 2]$, $x_{20} = 0$.

Литература

1. *Андреев А. Ю.* Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
2. *Андривевский Б. Р., Фрадков А. Л.* Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. СПб: Наука, 1999.
3. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968.
4. *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического управления. М.: Наука, 1975.
5. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
6. *Бурдаков С. Ф., Мирошник И. В., Стельмаков Р. Э.* Системы управления движением ~~клеточных~~ роботов. СПб: Наука, 2001.
7. *Введение в топологию* / Ю. Г. Борисевич, Н. М. Близняков, Я. А. Израилевич, Г. Н. Фоменко. М.: Наука, Физматлит, 1995.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.
9. *Дроздов В. Н., Мирошник И. В., Скорубский В. И.* Системы автоматического управления с микро-ЭВМ. Л.: Машиностроение, 1989.
10. *Дроздов В. Н., Никифоров В. О., Бендюговский А. Е.* Математические основы теории систем. М.: Мир книги, 1994.
11. *Елкин В. И.* Редукция нелинейных управляемых систем. Дифференциально-геометрический подход. М.: Наука, 1997.
12. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. (Методы Ляпунова и их применение.) М.: Высшая школа, 1973.
13. *Иванов В. А., Фалдин И.В.* Теория оптимальных систем автоматического управления. М.: Наука, 1981.
14. *Калман Р., Фалб П., Арбид М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
15. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М., 1977.
16. *Колесников А. А.* Основы теории синергетического управления. М.: Испо-сервис, 2000.
17. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1984.
18. *Королев С. М., Мирошник И. В.* Анализ динамики и управление пространственным движением нелинейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. 2000. № 1.
19. *Крутько П. Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели. М.: Наука, 1987. Нелинейные модели. М.: Наука, 1988.

20. *Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
21. *Миросшник И. В.* Согласованное управление многоканальными системами. Л.: Энергоатомиздат, 1990.
22. *Миросшник И. В.* Частичная устойчивость и геометрические проблемы нелинейной динамики // Автоматика и телемеханика. 2002. № 1.
23. *Миросшник И. В.* Нелинейные системы. Анализ и управление. СПб: СПбГИТМО, 2002.
24. *Миросшник И. В.* Теория автоматического управления. Линейные системы. СПб: Питер, 2005.
25. *Миросшник И. В., Никифоров В. О.* Адаптивное управление пространственным движением нелинейных объектов // Автоматика и телемеханика. 1991. № 9.
26. *Миросшник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб: Наука, 2000.
27. *Миросшник И. В., Ушаков А. В.* Синтез алгоритма синхронного управления системой квазиоднотипных объектов // Автоматика и телемеханика. 1977. № 11.
28. *Мищенко А. С., Фоменко А. Г.* Курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: Изд-во МГУ, 1980.
29. *Никифоров В. О.* Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. СПб: Наука, 2003.
30. *Никифоров В. О., Ушаков А. В.* Управление в условиях неопределенности: чувствительность, адаптация и робастность. СПб: СПбГУ ИТМО, 2003.
31. *Первозванский А. А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986.
32. *Полушин И. Г., Фрадков А. Л., Хилл Д. Д.* Пассивность и пассивификация нелинейных систем // Автоматика и телемеханика. 2000. № 3.
33. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
34. *Попов Е. П.* Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1988.
35. *Румянцев В. В., Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987.
36. *Теория автоматического управления* / под ред. А. А. Воронова, ч. 1–2. М.: Высшая школа, 1977.
37. *Теория автоматического управления: Нелинейные системы управления при случайных воздействиях* / А. В. Нетушил и др. М.: Высшая школа, 1972.
38. *Теория систем с переменной структурой* / под ред. С. В. Емельянова. М.: Наука, 1970.
39. *Фурасов В. Д.* Устойчивость движения, оценки и стабилизация. М.: Наука, 1977.
40. *Фрадков А. Л.* Кибернетическая физика: принципы и примеры. СПб: Наука, 2003.
41. *Цлаф Л. Я.* Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М.: Наука, 1970.
42. *Цыпкин Я. З.* Основы теории автоматического управления. М.: Наука, 1977.
43. *Чураков Е. П.* Оптимальные и адаптивные системы. М.: Энергоатомиздат, 1987.
44. *Уткин В. И.* Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974.
45. *Уонем М.* Линейные многомерные системы управления: Геометрический подход. М.: Наука, 1980.

46. *Fradkov A. L., Miroshnik I. V., Nikiforov V. O.* Nonlinear and adaptive control of complex systems. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.
47. *Isidori A.* Nonlinear control systems. 3^d edition. Berlin: Springer-Verlag, 1995.
48. *Khalil H. K.* Nonlinear systems. 2nd edition. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
49. *Marino R., Tomei P.* Nonlinear control systems design. New Jersey: Prentice Hall, 1995.
50. *Miroshnik I. V.* Partial stabilization and geometric problems of nonlinear control // 15 IFAC World Congress. Barcelona, 2002.
51. *Miroshnik I. V.* Attractors and partial stability of nonlinear dynamical systems // Automatica, 40, 2004, pp. 473–480.
52. *Sastry S.* Nonlinear systems: analysis, stability and control. New-York: Springer-Verlag, 1999.

Предметный указатель

А

- автоколебания, 59
- аппроксимация, 115
- аттрактивность, 64, 143
- аттрактор, 48, 57
 - точечный, 49, 64

Б

- Барбалата
 - лемма, 21
- биекция, 17
- блок
 - динамический, 28
 - нелинейный, 27
 - положительный, 28, 29, 32

В

- векторное поле, 21, 37, 44
 - ϕ -связанность, 102
 - полное, 53

Г

- гамильтониан, 199–200, 226
- гиперплоскость, 26
 - инвариантная, 48
- гиперповерхность, 23
 - аттрактивность, 48, 57
 - градиент, 25
 - инвариантная, 47
 - локальные координаты, 24
- гистерезис, 28, 43
- градиент, 17, 25

Д

- динамика
 - внешняя, 120
 - нуль-динамика, 84
 - продольная, 133
- диффеоморфизм, 19
 - условие, 20

З

- задача
 - ЛКР, 191, 203, 208
 - асимптотика, 222
 - избыточность, 214, 219
 - на бесконечном интервале, 216
 - синтез регулятора, 209
 - свойства, 204, 217, 220
 - о брахистохроме, 176, 184
 - о кратчайшем пути, 177, 182, 188
 - со свободным правым концом, 207
 - терминальная, 206
 - условие трансверсальности, 209
 - вариационная, 176
 - Лагранжа, 189
 - на условный экстремум, 189
 - простейшая, 176
 - с подвижными концами, 186

И

- изоклина, 46
- инвариантность, 47
 - скользящего режима, 154
- инволютивность, 22
- интегральная кривая, 37

К

- каноническая форма, 103, 106, 107
 - нормальная, 123
 - основная, 109
- координаты
 - локальные, 24, 122, 133, 144
 - задачно-ориентированные, 133, 144
- кривая, 23
 - нормализованное описание, 136, 139
- критерий, 167, 230
 - быстродействия, 231, 235
 - динамической точности, 203
 - затрат топлива, 233
 - затрат энергии, 205, 230
 - комбинированный, 230

Л

- Лагранжа
 - задача, 189
 - критерий, 174
 - уравнения, 190
 - функция, 174
 - Лежандра
 - условие, 183
 - Ли
 - производная, 22
 - Липшица
 - условие, 18
 - Лурье
 - уравнение, 198, 217
 - Ляпунова
 - второй метод, 69
 - первый метод, 68
 - уравнение, 76
 - функция, 71
 - лагранжиан, 190, 200
 - лемма
 - Барбалата, 21
 - Ляпунова, 77
 - линеаризация
 - аппроксимация, 68, 115
 - точная, 112, 118, 125
 - линия переключения, 42, 150–151, 155, 158
 - оптимальная, 238
 - люфт, 28
- М**
- метод
 - Ляпунова, 68–69
 - изоклин, 45–46
 - припасовываения, 41
 - согласованного управления, 131, 134, 136
 - многообразие, 23
 - множество
 - инвариантное, 46, 57, 153, 160
 - нуль-динамики, 84, 90, 122, 124
 - притягивающее, 57
 - множители
 - Лагранжа, 174, 190
 - модель
 - задачно-ориентированная, 135, 138
 - каноническая, 103, 106–108
 - в форме Гамильтона, 199–200
 - задачи ЛКР, 209
 - нормальная форма, 123
 - оптимальная, 192, 196, 226
 - основная форма, 108
 - линейная
 - каноническая, 124, 209
 - эквивалентная, 101, 106

Н

- нелинейные звенья, 27
 - соединение, 30, 32
- неустойчивость, 74
- норма
 - евклидова, 16, 70
 - функциональная, 13, 21
- нуль-динамика, 84, 122–123
- линейной системы, 124
- устойчивая, 127

О

- область притяжения, 64, 66
- оптимальное быстродействие, 231
 - линейных объектов, 235
- оптимальное управление, 166
 - задачи с ограничениями, 225
 - методы, 202
 - по быстродействию, 231
 - по затратам топлива, 233
 - по затратам энергии, 232
 - принцип оптимальности, 249
 - синтез, 195, 200
 - регулятора, 208–209, 217
- относительная степень, 118, 119
- отображение, 11
 - функциональное, 12
 - свойство линейности, 14

П

- Попова
 - неравенство, 29, 92
- пассивность, 92
 - линейной системы, 94
- поверхность, 23
 - переключения, 140, 156, 163
- подмногообразие, 24
- положение равновесия, 62
 - частичное, 79, 83
- предельный цикл, 59
- преобразование
 - координат, 100
 - основное, 108, 118
- принцип
 - максимума, 228
 - оптимальности, 240
- производная Ли, 22

Р

- равновесие, 62
 - частичное, 79, 80, 83
- распределение, 22

регулятор

квазиоптимальный, 169, 238
 оптимальный, 169

решение системы, 37

единственность, 51
 продолжимость, 53
 стационарное, 38, 55
 существование, 50

С

свойства

глобальные, 60, 67
 локальные, 60, 62

сепаратриса, 60

система

гладкая, 35, 38
 каноническая форма, 105–107, 109
 каскадная, 128
 квази-оптимальная, 155, 169, 238
 линейная, 26, 33–34
 вещественно-положительная, 95, 157
 нормальная форма, 125
 пассивная, 94
 устойчивая, 76
 устойчивая по входу, 97
 многоканальная, 131
 нелинейная, 11, 26, 33
 аффинная, 34
 неустойчивая, 62
 нормальная форма, 123
 оптимальная, 169, 230
 относительная степень, 117
 пассивная, 91
 переменной структуры, 148
 полная, 53
 релейная, 147, 235
 устойчивая, 157
 решение, 37, 49
 сопряженная, 192, 209, 228
 стабилизация, 112, 117
 управляемость, 111
 устойчивая, 62, 68–69
 фазовый портрет, 38
 цепная форма, 113, 126
 эквивалентность, 101, 105

скользящий режим, 151, 160, 163

стабилизация

каскадной системы, 128
 состояния, 114–115, 117
 выхода, 126

стационарная точка, 38

Т

теорема

Барбашина–Красовского, 76

Ляпунова, 73–74

Ляпунова–Пуанкаре, 68

Ферма, 171

об n интервалах, 236

об обратной функции, 20

точка

притяжения, 64
 равновесия, 62
 сингулярная, 50, 170
 стационарная, 38, 55, 171

траектория

заданная, 132
 круговая, 140
 фазовая, 38

У

управление

каскадной системой, 128
 линеаризирующее, 111, 126
 оптимальное, 168, 195, 200, 202
 пространственным движением, 142,
 144, 148
 релейное, 156, 231, 235
 согласованное, 131, 134, 136, 139
 стабилизирующее, 114, 126–127, 203
 траекторное, 136, 139–140
 эквивалентное, 153, 160

управляемость, 111

матрица, 106

уравнение

Беллмана, 241, 244
 Ляпунова, 76
 Риккати, 198, 217
 дифференциальное, 210
 Френе, 140
 Эйлера–Лагранжа, 182, 185
 Эйлера–Пуассона, 185

уравнения

Гамильтона, 200
 Лагранжа, 190–191, 195

условие

Лежандра, 183
 Попова, 29, 92
 переключения, 150, 152
 скользящего режима, 151, 163
 согласования, 132
 стационарности, 55, 171, 174
 гамильтониана, 201, 226
 трансверсальности, 187, 209, 228

устойчивость, 61

асимптотическая, 64, 73
 равномерная, 66
 глобальная, 67, 75
 линейной системы, 76
 по Ляпунову, 62, 73

по входу, 96
по выходу, 88, 90
по части переменных, 79
равномерная, 65
релейной системы, 157
частичная, 78, 86, 88
экспоненциальная, 66, 74, 78

Ф

Ферма
теорема, 171
Френе
уравнение, 140
фазовая траектория, 38
построение, 40–41, 45
свойства, 43
фазовый портрет, 38, 43
функционал, 12, 176
вариации, 179
качества, 167, 230
квадратичный, 203
вход-выход, 219
параметризация, 180
расширенный, 190
функция, 14
Беллмана, 241
Гамильтона, 199, 226

Лагранжа, 174, 190
Ляпунова, 69
векторная, 15
гладкая, 17
знакоопределенная, 69
квадратичная, 16, 71
липшицева, 18
неограниченно возрастающая, 70
норма, 13, 21
обратная, 16
однозначная (биекция), 17
свойство линейности, 15
штрафа, 167
экстремум, 169, 173

Э

экстремаль, 177
вариации, 178–179
экстремум, 169, 177
условный, 173, 189

Я

Якоби
матрица, 18, 101, 135, 144
системы, 68
якобиан, 19

Мирошник Илья Васильевич

Теория автоматического управления
Нелинейные и оптимальные системы

Главный редактор
Заведующий редакцией
Руководитель проекта
Художник
Корректор

Е. Строганова
А. Кривцов
В. Шачин
Л. Адуевская
Н. Солнцева

Лицензия ИД № 05784 от 07.09.01.

Подписано к печати 04.08.05. Формат 70×100 1/16. Усл. п. л. 21,93.

Тираж 2000. Заказ 281

ООО «Питер Принт», 194044, Санкт-Петербург, пр. Б. Сампсониевский, 29а.

Налоговая льгота — общероссийский классификатор продукции ОК 005-93, том 2; 95 3005 — литература учебная.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ОАО «Техническая книга»
190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29